



## Der Einfluß fehlerhafter Altpunkte auf die Bestimmung von Neupunkten

Werner Daxinger <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Abteilung Theoretische Geodäsie, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 27-29, A-1040 Wien*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **83** (3), S. 136–144

1995

BibT<sub>E</sub>X:

```
@ARTICLE{Daxinger_VGI_199513,  
  Title = {Der Einflu{\ss} fehlerhafter Altpunkte auf die Bestimmung von  
    Neupunkten},  
  Author = {Daxinger, Werner},  
  Journal = {VGI -- {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und  
    Geoinformation},  
  Pages = {136--144},  
  Number = {3},  
  Year = {1995},  
  Volume = {83}  
}
```





# Der Einfluß fehlerhafter Altpunkte auf die Bestimmung von Neupunkten

Werner Daxinger, Wien

## Kurzfassung

Seit Dezember 1994 gilt in Österreich eine neue Vermessungsverordnung. Diese schreibt erstmals vor, die Lageunsicherheit der staatlichen Festpunkte in die Berechnung einfließen zu lassen und die Genauigkeit der abgeleiteten Standpunkte anzugeben. Nach einer Definition der einzelnen Fehlerbegriffe wird ein Modell zur Berücksichtigung dieser Fehlerinformation beschrieben. An einem Beispiel werden die Einflüsse dokumentiert.

## Abstract

Since the beginning of December 1994 a new regulation for land registered surveying has been valid in Austria. Now the errors of the control points have to be considered for the computation of new points. Besides the accuracy of the new points has to be documented. After giving a brief definition of the theory of errors a mathematical model taking this error information into account is described. The effects are shown by use of a definitive example.

## 1. Einleitung

Am 1. Dezember 1994 ist in Österreich eine neue Vermessungsverordnung (VermV 94) in Kraft getreten. Neben dem § 2, der den nunmehr vom Vermessungsbefugten frei zu wählenden Anschluß an die nächstgelegenen Festpunkte regelt, enthält der § 7 eine aus technischer Sicht wesentliche Änderung:

§ 7 VermV 94:

*Die Vermessung ist so vorzunehmen, daß unter Bedachtnahme auf die mittlere Punktlagegenauigkeit der Festpunkte (Triangulierungspunkt  $\pm 5$  cm, Einschaltspunkt  $\pm 7$  cm) die nachstehend angegebene mittlere Punktlagegenauigkeit eingehalten wird:*

1. bei der Bestimmung von Standpunkten:  $\pm 10$  cm,
2. bei der Bestimmung von Grenzpunkten:  $\pm 15$  cm.

Somit ist die Unsicherheit der Anschlußpunkte für die Ableitung von Neupunkten zu berücksichtigen. Die Genauigkeitsangaben der Festpunkte sind Erfahrungswerte, welche die äußere Lagegenauigkeit definieren und nach dem Helmert'schen Punktlagefehler berechnet wurden.

Nach einem kurzen Abriss der Fehlertheorie soll auf die Berücksichtigung der Lagegenauigkeit der Altpunkte bei der Punkteinschaltung von Neupunkten eingegangen werden.

## 2. Grundbegriffe der Fehlerlehre

### 2.1 Fehlerarten

Messungen aller Art enthalten Fehler. Zur Beurteilung der Zuverlässigkeit von abgeleiteten Größen ist es notwendig, die Art, die Ursache, das Ausmaß und die Wirkung auftretender Beobachtungsfehler zu kennen.

Man unterscheidet zwischen

- a) groben
- b) systematischen und
- c) zufälligen Fehlern.

Grobe Fehler beruhen auf Irrtümern, wie etwa ein Dezimeterfehler beim Nivellement. Sie sind eine Folge mangelnder Sorgfalt und sollen hier nicht weiter betrachtet werden.

Systematische Fehler wirken regelmäßig und beeinflussen die Meßergebnisse nach erkennbaren Gesetzen. So sind zum Beispiel vernachlässigte Refraktionseinflüsse oder Lotabweichungen Ursachen für systematisch verfälschte Ergebnisse. Die systematischen Fehler lassen sich weitgehend eliminieren, wenn auch nur unter großem Aufwand.

Zufällige Fehler treten regellos auf, ihre Beträge und Vorzeichen sind nicht vorhersehbar. Ihre Ursache liegt in der Unvollkommenheit der Beobachter und Instrumente. Ein charakteristisches Merkmal zufälliger Fehler ist ihre Verteilung. Es läßt sich empirisch zeigen, daß bei einer großen Anzahl von Messungen kleine Fehler häufiger auftreten als große und daß Fehler mit

gleichem Betrag annähernd oft positiv und negativ auftreten (Abb. 1).

Wenn die Beobachtungsfehler dieser Verteilung folgen, so stellt der Mittelwert den wahrscheinlichsten Wert dar. Da das Vorzeichen zufälliger Fehler wechselt, können sie durch unabhängige Wiederholungsmessungen und Mittelbildung eliminiert werden. Die in Abb. 1 dargestellte Funktion ist die Dichtefunktion der Normalverteilung, sie ist auch unter dem Namen Gauß'sche Glockenkurve bekannt. Die Normalverteilung kann als die wichtigste Verteilung einer stetigen Zufallsgröße bezeichnet werden, weil der Großteil aller in der Geodäsie auftretenden Zufallsgrößen dieser Verteilung folgt oder aus normalverteilten Größen abgeleitet werden kann. Auf den Mittelwert zentriert lautet die Dichtefunktion der Normalverteilung:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \quad [1]$$

e ... Exponentialfunktion  $\sigma$  ... theoretische Streuung

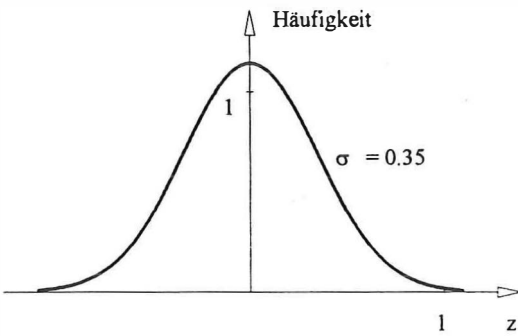


Abbildung 1

## 2.2 Fehlermaße

Sie kennzeichnen die Vertrauenswürdigkeit und Zuverlässigkeit von Meßergebnissen.

Es gilt folgende Festlegung:

- a) Der durchschnittliche Fehler  $t$  ist das Mittel der Absolutbeträge der wahren Fehler  $\varepsilon$ :

$$t = \pm \frac{1}{n} \sum |\varepsilon|, \quad n \Rightarrow \infty \quad [2]$$

- b) Der mittlere Fehler ist das bedeutendste Fehlermaß. Er ist durch das quadratische Mittelmaß aller  $\varepsilon$  bestimmt:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum \varepsilon^2}{n}}, \quad n \Rightarrow \infty \quad [3]$$

$\sigma$  wird auch als theoretische Streuung bezeichnet.

Da in der Praxis meist (z.B.: eine mit einem Präzisionsdistanzmeßgerät oder Interferenzkomparator bestimmte Strecke kann bei der Eichung von Distanzern minderer Genauigkeit als wahrer Wert angesehen werden) anstatt der wahren Fehler die Verbesserungen  $v$  (Abweichung vom wahrscheinlichsten Wert) bekannt sind, kann nur die empirische Standardabweichung oder Streuung berechnet werden:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum vv}{n-1}} \quad [4]$$

- c) Der wahrscheinliche Fehler  $r$  ist dadurch gekennzeichnet, daß gleich viele Fehler größer wie kleiner sind als er. Anders formuliert, liegt der wahre Fehler einer Beobachtung mit der Wahrscheinlichkeit  $P = 1/2$  zwischen  $-r$  und  $+r$ :

$$P(-r < \varepsilon < +r) = \frac{1}{2} \quad [5]$$

Für  $n \Rightarrow \infty$  läßt sich zeigen, daß

$$m : t : r = 1 : 0.80 : 0.67 \quad [6]$$

und daß 68.3% der wahren Fehler im Intervall von  $-m$  bis  $+m$ , 95.4% zwischen  $-2m$  und  $+2m$  und 99.7% innerhalb  $-3m$  und  $+3m$  liegen.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß dies an normalverteilte, von systematischen Einflüssen befreite Beobachtungen und an eine aus zahlreichen Beobachtung errechnete empirische Standardabweichung gebunden ist.

## 2.3 Koordinatenfehler

Wird ein Punkt durch Ausgleichung koordinativ bestimmt, so fällt bei der Berechnung auch eine Kofaktorenmatrix an, aus der die mittleren Fehler in Richtung der Koordinatenachsen berechnet werden können.

$$N = A^t P A, \quad N^{-1} = Q = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} = m_0 \begin{bmatrix} \sqrt{Q_{xx}} \\ \sqrt{Q_{yy}} \end{bmatrix} \quad [7]$$

$m_0$  bezeichnet darin den mittleren Gewichtseinheitsfehler und folgt aus

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum pvv}{n-u}} \quad [8]$$

$n$  ... Anzahl der Beobachtungen  
 $u$  ... Anzahl der Unbekannten.

## 2.4 Punktfehler

Die Koordinatenfehler sind eigentlich weder anschaulich noch aussagekräftig, da sie vom gewählten Koordinatensystem abhängen. Den linearen Lagefehler in einer beliebigen Richtung erhält man demnach durch fortwährende Dre-

hung des Koordinatensystems. Die Richtungswinkel für Maximum und Minimum folgen aus

$$\tan 2\Theta = \frac{2 Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} \quad [9]$$

Beziehung [9] liefert zwei Lösungen für  $2\Theta$ , die sich um  $200^g$  unterscheiden. Damit erhält man die Extremwerte der mittleren Koordinatenfehler:

$$A = m_0 \sqrt{Q_{xx} \cos^2 \Theta + Q_{xy} \sin 2\Theta + Q_{yy} \sin^2 \Theta} \quad \text{in Richtung } \Theta \quad [10]$$

$$B = m_0 \sqrt{Q_{xx} \sin^2 \Theta - Q_{xy} \sin 2\Theta + Q_{yy} \cos^2 \Theta} \quad \text{in Richtung } \Theta + 100^g.$$

In diesem gegenüber dem x,y-Koordinatensystem verdrehten A,B-System sind die Koordinatenfehler unkorreliert!

Stellt man den linearen Lagefehler in einer Richtung t als Funktion von A und B dar,

$$m_t^2 = A^2 \cos^2 (t - \Theta) + B^2 \sin^2 (t - \Theta), \quad [11]$$

so beschreibt diese Gleichung die Fußpunktskurve einer Ellipse mit den Halbachsen A und B.  $m_t^2$  bezeichnet den Radiusvektor dieser Fußpunktskurve (Abb. 2). Die Fußpunktskurve ist der geometrische Ort aller vom Ellipsenmittelpunkt auf die Ellipsentangenten gefällten Lotfußpunkte. In Netzbildern zeichnet man der Einfachheit wegen die achsengleiche Fehlerellipse.

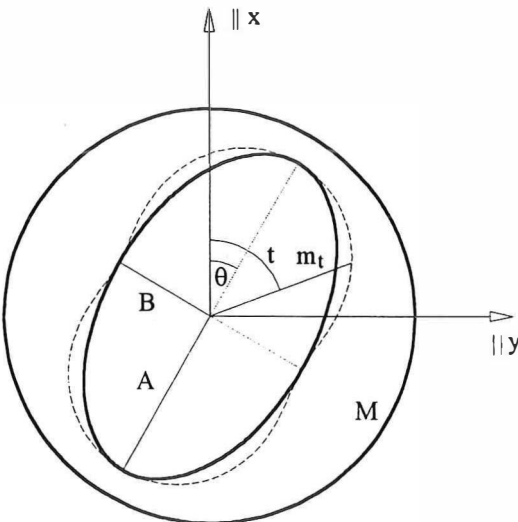


Abbildung 2

Mittelt man den linearen Lagefehler über alle Richtungen,

$$R^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A^2 \cos^2 t + B^2 \sin^2 t] dt = \frac{A^2 + B^2}{2}, \quad [12]$$

so erhält man daraus den Helmert'schen Punktfehler

$$M = R\sqrt{2} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = m_0 \sqrt{\text{Spur } Q} \quad [13]$$

Er stellt ein von der zufälligen Lage des Koordinatensystems unabhängiges und somit eindeutiges Genauigkeitsmaß dar. Der Helmert'sche Punktfehler errechnet sich allein aus der Spur der Kovarianzmatrix und spricht vor allem auf die großen Halbachsen der Fehlerellipse an. Dieser mittlere Punktfehler ist der Form nach eindimensional, dem Wesen nach aber zweidimensional. Es ist daher unzulässig, seine Sicherheitswahrscheinlichkeit aus einer eindimensionalen Dichtefunktion zu berechnen.

### 2.5 Die Wahrscheinlichkeit zweidimensionaler zufälliger Fehler

Nach dem Multiplikationssatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier normalverteilter, unabhängiger Zufallsgrößen  $z_A, z_B$  aus dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$dW(z_A, z_B) = \varphi(z_A) \cdot \varphi(z_B) dz_A dz_B = \varphi(z_A, z_B) dz_A dz_B \quad [14]$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine vorgegebene Fläche F die wahre Punktlage enthält, errechnet sich zu

$$W = \int_F dW = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{AB} \iint_F e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{z_A^2}{A^2} + \frac{z_B^2}{B^2} \right)} dF. \quad [15]$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß das Rechteck mit den Seitenlängen 2A und 2B die wahre Punktlage einschließt  $68.3\% \cdot 68.3\% = 46.6\%$ . Diese Berechnung läßt sich nicht auf die Koordinatenfehler  $m_x, m_y$  übertragen, da diese in der Regel stochastisch abhängig sind.

Die Ellipse mit den Halbachsen A und B wird mittlere Fehlerellipse nach Helmert genannt und deckt die wahre Punktlage mit einer Wahrscheinlichkeit von 39.3% ab, jene mit den Halbachsen  $\sqrt{2} A$  und  $\sqrt{2} B$  mit 63.2%. Um eine Wahrscheinlichkeit von 50% zu erhalten, müssen die Halbachsen mit dem Faktor 1.18 erweitert werden, die so entstandene Ellipse bezeichnet man als wahrscheinliche Fehlerellipse.

Der Kreis mit dem Radius M schließt die wahre Punktlage in Abhängigkeit des Verhältnisses der beiden Halbachsen A und B mit einer Wahrscheinlichkeit von 63.2–68.3% ein.

Die hier angegebenen Wahrscheinlichkeiten beruhen auf einer großen (theoretisch unendlichen) Überbestimmung. Da die Sicherheitswahrscheinlichkeiten vom Grad der Überbestimmung

# NEU I und II\*

## Messen in einer neuen Qualität. Digital. Reflektorlos.

Mit dem Universal-Tachymeter Rec Elta® RL können Sie unzugängliche Meßpunkte reflektorlos erfassen, bei zugänglichen Meßpunkten aber auch wie gewohnt messen.

Mit den Digital-Nivellieren DiNi® 10 und DiNi® 20 bestimmen Sie besonders einfach Höhen und Entfernungen: Meßlatte anzielen, Meßfunktion auslösen. Alles andere, von der Berechnung bis hin zur Datenspeicherung, erledigt das Nivellier.

Selbstverständlich sind die eindeutige Benutzerführung, die integrierten Programme und die interne Registrierung.

Sie sollten sich das Rec Elta® RL und die DiNi® einmal genauer anschauen. Interessiert? Rufen Sie uns an oder faxen Sie.



Weitere Neuheiten von  
Carl Zeiss

III. Elta® 50, ETh® 50  
IV. GePos® RS 12

Zeiss Instrumente

Zertifizierte Qualität

gemäß

DIN ISO 9001/EN 29001

ZEISS

Carl Zeiss GmbH  
Modecenterstr. 16  
A-1030 Wien  
Tel. (43)0222/795 18-0

...damit es beim Messen  
vorwärts geht.

abhängen, ist der Übergang auf Konfidenzcellen ratsam. Bei deren Verwendung wird ein Signifikanzniveau vorgegeben (z.B. 95%) und sodann werden die Achsen mit einem von der Überbestimmung abhängigen Faktor derart erweitert, daß diese Sicherheitswahrscheinlichkeit von der Fehlerfigur erreicht wird.

Die Ausführungen dieses Abschnittes lassen sich in einfacher Weise auf die räumliche Punktbestimmung übertragen.

### 3. Berücksichtigung der Fehlerinformation der Altpunkte

Bisher wurden bei der Bestimmung von Neupunkten nur die Beobachtungsfehler berücksichtigt, die Lagefehler der Festpunkte wurden übergangen. Die neue Vermessungsverordnung schreibt nun vor, die Fehlerinformation der staatlichen Festpunkte einzubeziehen. Vorerst wird diese Fehlerinformation in Form des mittleren Punktlagefehlers nach Helmert mitgeteilt, aus dem dann die Koordinatenfehler der Festpunkte unter der Annahme der Isotropie rückgerechnet werden können. Weiters ist der Fehler innerhalb einer Festpunktgruppe einheitlich anzunehmen – es wird also ein homogenes Festpunktfeld vorausgesetzt. Die Kovarianzmatrix der Altpunkte ist somit als Diagonalmatrix anzusetzen, die Koordinaten werden als voneinander unabhängig betrachtet – eine Vereinfachung, welche die Realität nur grob repräsentiert. Es ist jedoch denkbar, daß in absehbarer Zeit die Ergebnisse einer Festpunktausgleichung vom Bundesamt vollständig zur Verfügung gestellt werden. Aus diesem Grund werden folgende Ableitungen für den allgemeinen Fall vollbesetzter Kovarianzmatrizen durchgeführt. Weiters wird vorausgesetzt, daß zwischen Festpunkts- und Neupunktsbestimmung Unabhängigkeit besteht.

Aus einer Vorausgleichung sind die Festpunktskoordinaten  $(x_F, y_F, h_F)$  samt ihrer symmetrischen Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{FF}$

$$\mathbf{C}_{FF} = m_{0F}^2 \begin{bmatrix} Q_{xixi} & Q_{xily} & Q_{xihl} & \cdot & \cdot & Q_{xihj} \\ \cdot & Q_{yily} & Q_{yihl} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{yhil} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{hjhj} \end{bmatrix} \quad [16]$$

bekannt. Die Neupunkte sind durch Messungen und deren symmetrische Kovarianzmatrix bestimmt:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_i \\ \cdot \\ L_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{LL} = m_{0L}^2 \begin{bmatrix} Q_{L_i L_i} & \cdot & Q_{L_i L_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & Q_{L_k L_k} \end{bmatrix} \quad [17]$$

In der Praxis wird für  $\mathbf{C}_{LL}$  meist eine Diagonalmatrix angenommen.

Die Beobachtungen lassen sich als Funktion der Unbekannten und Festpunktskoordinaten darstellen:

$$L_i = F_i(x_m, y_m, h_m, x_n, y_n, h_n) \quad (x, y, h) \text{ Festpunkts- oder Neupunktskoordinaten} \quad [18]$$

Durch Linearisieren erhält man die Verbesserungsleichungen

$$L_i + v_i = F_i(x_{m0}, y_{m0}, h_{m0}, x_{n0}, y_{n0}, h_{n0}) + \mathbf{F}_i' \mathbf{x} \\ \mathbf{F}_i' = \left( \frac{dF_i}{dx_m}, \frac{dF_i}{dy_m}, \frac{dF_i}{dh_m}, \frac{dF_i}{dx_n}, \frac{dF_i}{dy_n}, \frac{dF_i}{dh_n} \right) \quad [19] \\ \mathbf{x}^t = (\delta x_m, \delta y_m, \delta h_m, \delta x_n, \delta y_n, \delta h_n).$$

Der Vektor der gekürzten Beobachtungen folgt daraus zu

$$\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{F}(x_{N0}, x_F) \quad [20]$$

wobei  $x_{N0}$  die Näherungskordinaten der Neupunkte und  $x_F$  die Koordinaten der Anschließpunkte bezeichnen. Die Kovarianzmatrix der gekürzten Beobachtungen ergibt sich zu

$$\mathbf{C}_{ll} = \mathbf{C}_{LL} + \mathbf{F}_F' \mathbf{C}_{FF} \mathbf{F}_F'^t = \mathbf{P}_{ll}^{-1} \quad [21]$$

$\mathbf{F}_F'$  gewinnt man durch Linearisieren von [18], die einzelnen Koeffizienten dieser Matrix sind die Ableitungen der Beobachtungsfunktionen nach den Festpunktskoordinaten. Für Beobachtungen zwischen zwei Neupunkten enthält  $\mathbf{F}_F'$  eine Leerzeile. Es sei noch einmal betont, daß Beziehung [21] nur gültig ist, wenn die Koordinaten der Festpunkte aus einer separaten Ausgleichung stammen und die darin verwendeten Beobachtungen völlig unabhängig von jenen zur Ableitung der Neupunkte sind.

Nachdem nun  $\mathbf{P}_{ll}$  vorliegt, erhält man das Normalgleichungssystem in der bekannten Form:

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_{ll} \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{ll} \mathbf{l} \quad [22]$$

Beziehung [21] veranschaulicht den Einfluß der Qualität der Festpunkte auf die Genauigkeit der Neupunkte. Je genauer die Beobachtungen sind, umso mehr wirkt sich dieser Einfluß aus.

Heutige Meßmittel decken geringste Spannungen im staatlichen Festpunktfeld auf. Die üblicherweise ermittelten Genauigkeitsmaße, die nur unter Berücksichtigung der Beobachtungsfehler abgeleitet werden, liefern zu optimistische Werte, wie anhand eines Berechnungsbeispiels gezeigt wird. Der in der neuen Vermessungsverordnung angegebene Punktlagefehler ist ein Erfahrungswert und spiegelt keine lokalen Verhältnisse wieder. Diese einfache Modellierung ist als

# FEHLERFREIE FESTPUNKTE

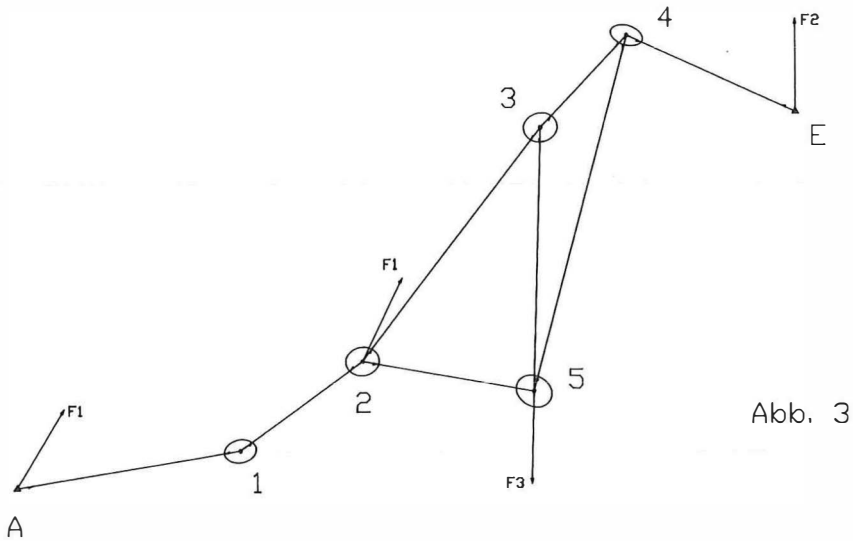


Abb. 3

100 200 m Maßstab Lage  
50 100 mm Maßstab Fehlerellipsen

# FEHLERHAFT FESTPUNKTE

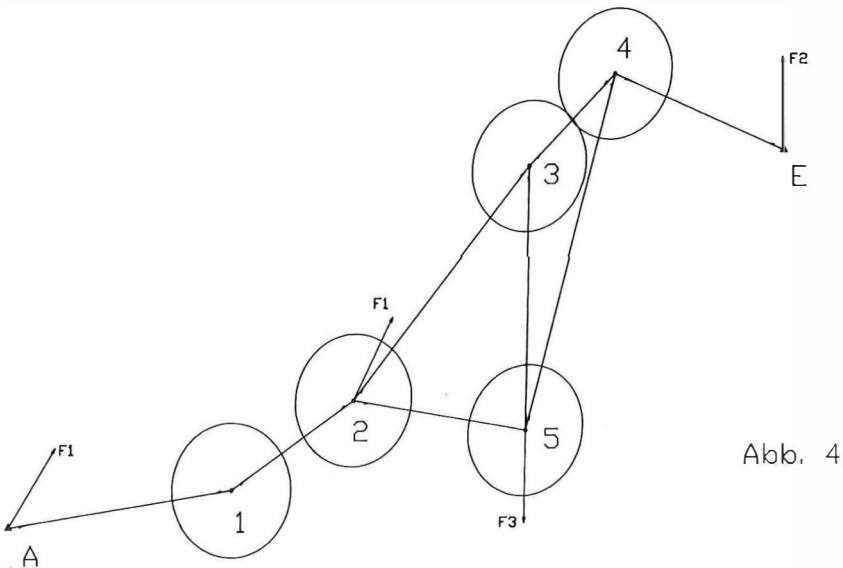


Abb. 4

# BEV



Fotos: ÖFVW, Gestaltung: BEV

**Schöne Urlaubstage  
mit unseren Karten  
wünscht Ihnen**

*Alle BEV*



erster Schritt in Richtung zeitgemäße Berechnungsverfahren zu interpretieren. Denn ein früher oft gebrauchtes Argument, daß die Kovarianzinformation der übergeordneten Netzhierarchie wegen des großen Rechenaufwandes unberücksichtigt bleiben muß, trifft heute längst nicht mehr zu.

Für die Genauigkeit der Neupunkte sind sowohl Beobachtungsfehler als auch Fehler der Anschlußpunkte maßgebend. Ihr jeweiliger Einfluß läßt sich durch zwei voneinander unabhängigen Fußpunktskurven darstellen. Diese partiellen Fehlerfiguren ergeben durch quadratische Addition der Radiusvektoren die totale Fußpunktskurve, die aus der Inversen der Normalgleichungsmatrix berechnet werden kann.

#### 4. Ausgleichung eines Polygonnetzes

Im diesem Abschnitt wird ein aus fünf Punkten bestehendes Polygonnetz zuerst ohne und anschließend mit Berücksichtigung der Fehlerinformation der Festpunkte ausgeglichen.

Vom Einschaltpunkt A ausgehend wurde ein Polygonzug gemessen, der die Punkte 1,2,3,4 enthält und im Einschaltpunkt E endet. Weiters

beginnt im Punkt 2 ein Nebenzug, der sich im Punkt 5 abermals teilt (Abb. 3). Bei den Visuren zwischen den Polygonpunkten wurden jeweils Richtung, Strecke und Zenitdistanz gemessen. In den Punkten A, E, 2 und 5 wurden Richtungen zu Fernzielen beobachtet (Abb. 3). Die Strecken wurden ohne meteorologisch-instrumentelle Korrektur in die Gauß-Krüger-Ebene reduziert. Die äußere Genauigkeit der Distanzen wurde mit 10 mm, jene der Richtungen mit 10<sup>cc</sup> angenommen, der Gewichtseinheitsfehler apriori wurde mit  $m_0 = \pm 1$  festgelegt. In die Berechnung der Unbekannten gingen insgesamt 34 Beobachtungen (19 Richtungen, 15 Distanzen) ein. Die mittleren Punktlagefehler der Anschlußpunkte und Fernziele gehen aus Tabelle 1 hervor.

Die Tabellen 2 und 3 dokumentieren die Ergebnisse der einzelnen Berechnungsarten, in Abb. 3 und 4 sind die Fehlerellipsen eingetragen.

Der Gewichtseinheitsfehler der Berechnung ohne die Berücksichtigung der Festpunktsunsicherheit fällt größer aus als die Beobachtungsgenauigkeit erwarten läßt. Dies weist darauf hin, daß vorhandene Netzspannungen übergangen werden.

Tabelle 3 zeigt einen wesentlich kleineren Gewichtseinheitsfehler, die Festpunktsfehler wur-

Punktname	Punktart	Lagefehler laut VermV 94
A, E	Einschaltpunkt	$\pm 70$ mm
F1, F2, F3	Triangulierungspunkt	$\pm 50$ mm

Tabelle 1: Fehler der Festpunkte

Punkt	Koordinatenzuschläge		mittlere Fehler		Helmert'sche Fehlerellipse		
	dx [mm]	dy [mm]	$m_x$ [mm]	$m_y$ [mm]	A [mm]	B [mm]	$\Theta$ [gon]
1	25.3	25.0	7.3	10.2	10.3	7.1	88.9
2	23.4	14.4	9.0	10.8	10.8	8.8	90.6
3	35.5	- 2.9	9.1	10.8	10.9	9.0	88.0
4	26.5	-16.0	6.5	10.3	10.5	6.0	117.5
5	29.1	- 6.2	10.0	11.4	11.9	9.5	129.9

$$m_0 = \pm 1.73$$

Tabelle 2: Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Festpunktsfehler

Punkt	Koordinatenzuschläge		mittlere Fehler		Helmert'sche Fehlerellipse		
	dx [mm]	dy [mm]	$m_x$ [mm]	$m_y$ [mm]	A [mm]	B [mm]	$\Theta$ [gon]
1	25.2	16.3	42.1	38.2	42.1	38.2	3.6
2	22.9	16.9	41.5	37.2	41.7	37.0	13.2
3	27.8	14.0	41.1	36.4	41.7	35.7	21.1
4	16.7	6.5	40.9	36.3	41.5	35.6	21.7
5	21.9	3.0	41.0	36.6	41.6	36.0	20.2

$$m_0 = \pm 1.20$$

Tabelle 3: Ergebnisse mit Berücksichtigung der Festpunktsfehler

den also einigermaßen gut erfaßt. Weiters erkennt man, daß der Eingriff in das stochastische Modell auch eine Änderung der Zuschläge zu den Näherungskordinaten mit sich bringt.

**Literatur**

- [1] *Ackerl, F.*: „Über den Einfluß fehlerhafter Festpunkte auf das Ergebnis des Vorwärtseinschneidens“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1930.
- [2] *Ackerl, F.*: „Der Einfluß fehlerhafter Festpunkte auf trigonometrisch abgeleitete Neupunkte“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1965.
- [3] *Encke, J. F.*: S. 249ff. „Über die Methode der kleinsten Quadrate“, Berliner Astronomisches Jahrbuch, Ferdinand Dümmler, Berlin 1832.
- [4] *Gleinsvik, P.*: „Über die Genauigkeit der trigonometrischen Punktbestimmung mit besonderer Berücksichtigung der Einwirkung der Festpunkte“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1963.
- [5] *Helmerl, F. R.*: „Studien über rationale Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie“, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Verlag Teubner, Leipzig 1868.
- [6] *Helmerl, F. R.*: „Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“, Verlag Teubner, Leipzig 1872.
- [7] *Höpcke, W.*: „Über die Ableitung der mittleren Fehlerellipse aus dem Fehlergesetz der Ebene“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1937.
- [8] *Höpcke, W.*: „Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung“, Walter de Gruyter, Berlin-New York 1980.
- [9] *Laska, W.*: „Über den Einfluß der Ungenauigkeit gegebener Punkte auf das Resultat des Vorwärtseinschneidens“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1900.

- [10] *Lenzmann, L.*: „Zur Korrelation bei Punkteinschaltung und Netzausgleichung“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1981.
- [11] *Möhle, A.*: „Die Definition des ‚mittleren Punktfehlers‘ und der ‚mittleren Fehlerellipse‘“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1936.
- [12] *Möhle, A.*: „Über die Definition der mittleren Fehlerellipse“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1938.
- [13] *Möhle, A.*: „Zur Theorie der Genauigkeitsmaße in der Ebene“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1941.
- [14] *Pelzer, H. et al.*: „Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II“, Konrad Wittwer, Stuttgart 1985.
- [15] *Pinkwart*: „Zur Definition des mittleren Punktfehlers und der Fehlerellipse“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1938.
- [16] *Reißmann, G.*: „Die Ausgleichsrechnung“, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1976.
- [17] *Sütti, J.*: „Die Fortpflanzung der zweidimensionalen Fehler“, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 1965.
- [18] *Werkmeister, P.*: „Einfluß von Fehlern in den Koordinaten der Festpunkte auf die Koordinaten des Neupunktes bei trigonometrischer Punktbestimmung durch Einschneiden“, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Wien 1915.
- [19] *Wolf, H.*: „Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate“, Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn 1968.

*Anschrift des Verfassers:*

Dipl.-Ing. Werner Daxinger, Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, Abteilung Theoretische Geodäsie, Technische Universität Wien, Gußhausstraße 27–29, A-1040 Wien.



**Ermittlung der topographischen Abschattung von GPS-Satelliten unter Verwendung eines digitalen Geländemodells**

*Franz Hochstöger, Wien*

**1. Motivation**

Anlaß für die Beschäftigung mit dieser Problemstellung war eine Anfrage des Bundesamtes für Landestopographie (Schweiz) an das Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der Technischen Universität Wien, ob es möglich sei, das Geländemodellpaket SCOP (IPF, 1994) um die Berechnung der von der Topographie verursachten Abschattung von Satelliten des Globalen Positionierungs-Systems (GPS) zu erweitern. Da diese Aufgabe eine weitere interessante Anwendungsmöglichkeit des Geländemodells darstellt, wurde nach einer Aufwandsabschätzung eine entsprechende Softwarelösung realisiert. Darüber hinaus war seitens des Bundesamtes für Landestopographie bereits im

Herbst 1993 die Entscheidung ergangen, SCOP zu übernehmen.

**2. Grundlagen**

Obwohl GPS ursprünglich für den militärischen Einsatzbereich entwickelt worden war, erkannte man sehr bald die Nutzungsmöglichkeiten auch im zivilen Bereich (z.B. Hofmann-Wellenhopf et al., 1994). Heute sind GPS-Empfänger und Auswertesoftware zu Bedingungen (Genauigkeit, Bedienungskomfort, Preis, ...) verfügbar, die deren Einsatz für geodätische Anwendungen wirtschaftlich erlauben.

Bei der hochgenauen Einzelpunktbestimmung ist die gleichzeitige Sichtbarkeit von mindestens