



## Eine direkte Lösung des räumlichen Bogenschnittes

Herbert Lichtenegger <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Abteilung für Landesvermessung und Landinformation, Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Technische Universität Graz, A-8010 Graz, Steyrergasse 30*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **83** (4), S. 224–226

1995

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Lichtenegger_VGI_199522,  
  Title = {Eine direkte Lösung des räumlichen Bogenschnittes},  
  Author = {Lichtenegger, Herbert},  
  Journal = {VGI -- Österreichische Zeitschrift für Vermessung und  
    Geoinformation},  
  Pages = {224--226},  
  Number = {4},  
  Year = {1995},  
  Volume = {83}  
}
```





# Eine direkte Lösung des räumlichen Bogenschnitts

Herbert Lichtenegger, Graz

## Zusammenfassung

Es wird eine direkte Lösung des räumlichen Bogenschnitts angegeben. Diese basiert auf Vektoralgebra und ist im Vergleich zu den bisher bekannten Lösungen verblüffend einfach.

## Abstract

A direct solution of the three-dimensional intersection by ranges is presented. The method is based on vector algebra and is amazingly simple in comparison with known solutions.

## 1. Einleitung

Das Interesse der Fachwelt an direkten, nicht iterativen Lösungen für die dreidimensionalen Einschneideverfahren scheint ungebrochen, wie [2] zum räumlichen Rückwärtsschnitt, [5] zum räumlichen Bogenschnitt und [3] zum räumlichen Pseudostreckenschnitt beweisen. Dies ist auch die Motivation, eine neue direkte Lösung für den räumlichen Bogenschnitt vorzustellen, die im Vergleich zu den bisher bekannten Lösungen verblüffend einfach ist. Dabei bezieht sich die Einfachheit sowohl auf das geometrische Modell als auch auf die numerische Lösung, die durch Anwendung eines von Kleusberg (1994) angegebenen Verfahrens gewonnen wird.

wobei der Kosinus des Winkels zwischen den Einheitsvektoren  $\mathbf{b}_i$  und  $\mathbf{e}$  durch deren skalares Vektorprodukt ersetzt wurde. Nach Einführung der (berechenbaren) Hilfsgrößen

$$l_i = \frac{s_0^2 - s_i^2 + b_i^2}{2s_0 b_i} \quad (4)$$

vereinfacht sich (3) zu

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{e} = l_i, \quad (5)$$

wobei wiederum  $i = 1, 2$  zu setzen ist. (5) stellt daher ein System von zwei linearen Gleichungen für die drei unbekanntenen Komponenten von  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)^T$  dar. Die zur Lösung notwendige dritte Gleichung ist durch die Bedingung

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = e^2 = 1 \quad (6)$$

gegeben.

## 2. Problemstellung und Lösung

Es seien gemäß Abbildung 1 die Raumstrecken  $s_0, s_1, s_2$  zwischen den drei bekannten Punkten  $P_0, P_1, P_2$  und einem Neupunkt  $N$  gemessen. Wird angenommen, daß der Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  bekannt ist, dann lautet die einfache Lösung für die räumlichen Koordinaten  $\mathbf{X}$  des Neupunktes

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + s_0 \mathbf{e}, \quad (1)$$

wobei mit  $\mathbf{X}_0$  die vorgegebenen Koordinaten des Punktes  $P_0$  bezeichnet sind.

Zur Bestimmung von  $\mathbf{e}$  werden vorerst die Einheitsvektoren

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_0}{\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_0\|} = \frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_0}{b_i}; \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

berechnet. Nach Anwendung des Kosinussatzes in den Dreiecken  $(P_i, P_0, N)$  folgt weiters

$$s_i^2 = s_0^2 + b_i^2 - 2 s_0 b_i (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{e}), \quad (3)$$

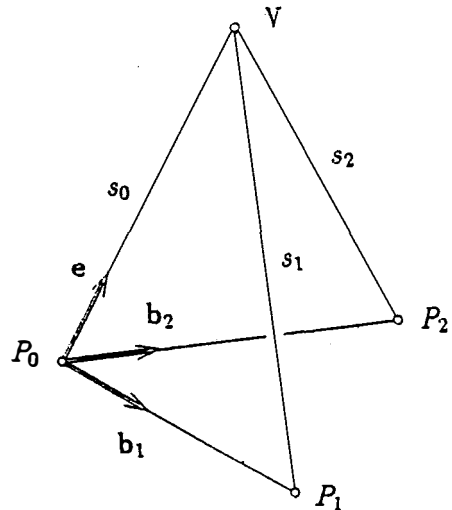


Abbildung 1: Zur Geometrie des räumlichen Bogenschnitts

Das System (5) entspricht auch den Bestimmungsgleichungen des sphärischen Bogenschnitts in der geodätischen Astronomie, vgl. [4]. Dem Vektor  $\mathbf{e}$  entspricht dort die unbekannte Zenitrichtung, den Vektoren  $\mathbf{b}_i$  entsprechen die Richtungsvektoren zu zwei bekannten Sternen und die Hilfsgrößen  $l_i$  sind identisch mit dem Kosinus der beobachteten Zenitdistanzen. Von Lichtenegger (1982) wird auch eine Lösung angegeben, welche die sukzessive Berechnung der drei unbekanntenen Komponenten von  $\mathbf{e}$  unter Beachtung der Bedingung (6) erlaubt. Hierzu wird vorerst das lineare Gleichungssystem (5) durch die evidente Beziehung  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = e_3$  mit  $\mathbf{a} = (0,0,1)^T$  ergänzt, so daß das System in Matrixschreibweise durch

$$\mathbf{A} \mathbf{e} = \mathbf{l} \quad (7)$$

dargestellt werden kann. Die Matrix  $\mathbf{A}$  enthält in den beiden ersten Zeilen die beiden Vektoren  $\mathbf{b}_i$  und in der dritten Zeile den Vektor  $\mathbf{a}$ . Der Vektor  $\mathbf{l}$  ist durch  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, e_3)^T$  definiert. Wird die Lösung von (7) in die Bedingung (6) eingesetzt, ergibt sich wegen

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{l})^T(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{l}) = \mathbf{l}^T(\mathbf{A}^{-1T}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{l} = \mathbf{l}^T\mathbf{M}\mathbf{l} = 1 \quad (8)$$

zunächst eine quadratische Gleichung für die Komponente  $e_3$ . Diese kann gelöst werden, da die Elemente der Matrix  $\mathbf{M}$  berechenbar sind. Anschließend werden die restlichen beiden Komponenten von  $\mathbf{e}$  aus der zu (7) inversen Beziehung gewonnen. Bezüglich weiterer Einzelheiten wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

In [3] wird gezeigt, daß auch die Lösung des Pseudostreckenschnitts auf ein zu (5) analoges System zurückgeführt werden kann. Weiters wird eine Formel zur expliziten Berechnung von  $\mathbf{e}$  angegeben. Die Ableitung dieser Beziehung wurde in einer persönlichen Mitteilung freundlicherweise zur Verfügung gestellt und soll nachstehend leicht modifiziert wiedergegeben werden.

Zur Lösung vor (5) wird von der Identität

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2) = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_2 \quad (9)$$

ausgegangen, die aus der Zerlegungsformel für das doppelte Vektorprodukt folgt, vgl. etwa [1]. Hierfür kann auch

$$\mathbf{e} \times \mathbf{g} = \mathbf{h} \quad (10)$$

geschrieben werden, wobei die beiden Vektoren

$$\mathbf{g} = \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \quad (11)$$

$$\mathbf{h} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}_2)\mathbf{b}_1 - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_2 = l_2\mathbf{b}_1 - l_1\mathbf{b}_2 \quad (12)$$

bekannt sind. Unter Beachtung der Definition für das vektorielle und skalare Produkt kann (10) auch in der Form

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{g})^2 = \mathbf{e}^2\mathbf{g}^2 - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e})^2 = \mathbf{h}^2 \quad (13)$$

ausgedrückt werden. Wegen der Bedingung (6) folgt daraus aber auch die Beziehung

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{e} = \pm \sqrt{\mathbf{g}^2 - \mathbf{h}^2}. \quad (14)$$

Wird (10) von links vektoriell mit  $\mathbf{g}$  multipliziert und anschließend auf die linke Seite wiederum die Zerlegungsformel für das doppelte Vektorprodukt angewendet, dann folgt

$$(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})\mathbf{e} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{e})\mathbf{g} = \mathbf{g} \times \mathbf{h}. \quad (15)$$

Für das skalare Produkt im zweiten Term der linken Seite von (15) kann in (14) eingesetzt werden und es ergibt sich schließlich die explizite Beziehung

$$\mathbf{e}^{(1,2)} = \frac{1}{\mathbf{g}^2} \left[ \mathbf{g} \times \mathbf{h} \pm \sqrt{(\mathbf{g}^2 - \mathbf{h}^2)} \mathbf{g} \right] \quad (16)$$

für die beiden möglichen Lösungsvektoren.

Die Diskussion von (16) erlaubt einen geometrischen Einblick in Art, Genauigkeit und Stabilität der Lösung:

- Der Vektor  $\mathbf{g}$  steht normal auf die Ebene durch die drei gegebenen Punkte (Basisebene), während der Vektor  $\mathbf{h}$  in der Basisebene liegt.
- Der Vektor  $\mathbf{g} \times \mathbf{h}$  liegt wiederum in der Basisebene und die beiden Lösungen  $\mathbf{e}^{(1,2)}$  sind daher symmetrisch bezüglich der Basisebene.
- Es gibt nur eine Lösung, wenn der Wurzelausdruck in (16) verschwindet. Der Wurzelausdruck ist auch ein Maß für die Genauigkeit der Lösung, da bei kleinen Werten schleifende Schnitte auftreten.
- Die Lösung versagt, wenn die beiden Vektoren  $\mathbf{b}_i$  kollinear sind und damit  $\mathbf{g}$  zu Null wird.

### 3. Numerisches Beispiel

Für das numerische Beispiel wurden die Ausgangsdaten von [5] entnommen. Es sind dies die nachfolgend in Metern angegebenen Koordinaten der Punkte des Basisdreiecks und die gemessenen Entfernungen zum Neupunkt.

Punkt	Koordinaten			Entfernung
$P_0$	888 806.888	696 452.798	990 808.120	16 188.809
$P_1$	880 220.736	701 216.040	996 997.005	11 562.454
$P_2$	892 694.551	716 297.039	985 590.542	12 747.290

Aus den gegebenen Daten lassen sich vorerst gemäß den (2) und (4) die Längen  $b_i$ , die Einheitsvektoren  $\mathbf{b}_i$  und die dimensionslosen Hilfsgrößen  $l_i$  ableiten.

$$b_1 = 11\,606.583 \text{ m}$$

$$b_2 = 20\,883.748 \text{ m}$$

$$\mathbf{b}_1 = (-0.7397\ 6568, +0.4103\ 9140, +0.5332\ 2195)^T$$

$$\mathbf{b}_2 = (+0.1861\ 5734, +0.9502\ 2411, -0.2498\ 3915)^T$$

$$l_1 = 0.7001\ 1843$$

$$l_2 = 0.7922\ 8333$$

Mit Hilfe von (11) und (12) werden dann die beiden Vektoren

$$\mathbf{g} = (-0.6092\ 1219, -0.0855\ 5925, -0.7793\ 4056)^T$$

$$\mathbf{h} = (-0.7164\ 3620, -0.3401\ 2315, +0.5973\ 7986)^T$$

und aus (16) die beiden Lösungen für den Einheitsvektor  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e}^{(1)} = (-0.3220\ 0926, +0.9353\ 5388, +0.1463\ 6653)^T$$

$$\mathbf{e}^{(2)} = (-0.3194\ 4541, +0.9357\ 1395, +0.1496\ 4635)^T$$

erhalten, wobei das Ergebnis mit Hilfe der Beziehungen (5) und (10) durchgreifend kontrolliert werden kann. Über (1) folgen schließlich die beiden Lösungen für den Neupunkt

Lösung	Koordinaten			
$N^{(1)}$	883 593.942	711 595.063	993 177.620	
$N^{(2)}$	883 635.447	711 600.892	993 230.716	

mit deren Hilfe die Schlußkontrolle durch Vergleich der gemessenen Entfernungen mit den aus Koordinaten gerechneten durchgeführt werden kann.

Es fällt auf, daß die beiden Lösungen benachbart sind. Der Grund liegt darin, daß der Wurzelausdruck in (16) nur etwa  $2 \cdot 10^{-3}$  und damit der Winkel zwischen den Lösungsvektoren und der Basisebene nur etwa  $0.1^\circ$  beträgt. Dieser Fall wird in der Praxis eher selten auftreten, er zeigt aber die Stabilität des Lösungsalgorithmus. Bemerkenswert muß noch, daß wegen der ungünstigen Geometrie eine Rechenunschärfe von  $10^{-8}$

eine Änderung in den Koordinaten in der Größenordnung von 0.05 m verursacht. Dies ist der Grund, warum das vorliegende Ergebnis geringfügig vom Ergebnis in [5] abweicht.

#### 4. Danksagung

Der Autor dankt Herrn Prof. Dr.-Ing. Alfred Kleusberg von der University of New Brunswick in Kanada sehr herzlich für seine Hilfe. Weiters wird Herrn Dipl.-Ing. Robert Kropf von der Technischen Universität in Graz der Dank für die Unterstützung bei der Erstellung des Manuskripts ausgesprochen.

#### Literatur

- [1] *Baule B. (1960): Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Band III: Analytische Geometrie, 6. Auflage, S. Hirzel Verlag Leipzig.*
- [2] *Grafarend E.W., Lohse P., Schaffrin B. (1989): Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt. Zeitschrift für Vermessungswesen, 114:2, 61 ff.*
- [3] *Kleusberg A. (1994): Die direkte Lösung des räumlichen Hyperbelschnitts. Zeitschrift für Vermessungswesen, 119:4, 188–192.*
- [4] *Lichtenegger H. (1982): Über die Lösung astrogeodätischer Grundaufgaben. In: Geodaesia Universalis, Festschrift Karl Rinner zum 70. Geburtstag, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 40, 232–241.*
- [5] *Singer P., Ströbel D., Hördt R., Bahndorf J., Linkwitz K. (1993): Direkte Lösung des räumlichen Bogenschnitts. Zeitschrift für Vermessungswesen, 118:1, 20–24.*

#### Anschrift des Verfassers

Univ.-Doz. Dr. Herbert Lichtenegger, Abteilung für Landesvermessung und Landinformation, Institut für Angewandte Geodäsie und Photogrammetrie, Technische Universität Graz, A-8010 Graz, Steyrergasse 30.