Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit der a posteriori Schätzung der Gewichte

Florijan Vodopivec [1], Dusan Kogoj [2]

[1] *University of Ljubljana, Faculty for Civil and Engineering and Geodetic Engineering, Jamova 2, SL-61000 Ljubljana, Slovenia*
[2] *University of Ljubljana, Faculty for Civil and Engineering and Geodetic Engineering, Jamova 2, SL-61000 Ljubljana, Slovenia*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **85** (3), S. 202–207

1997

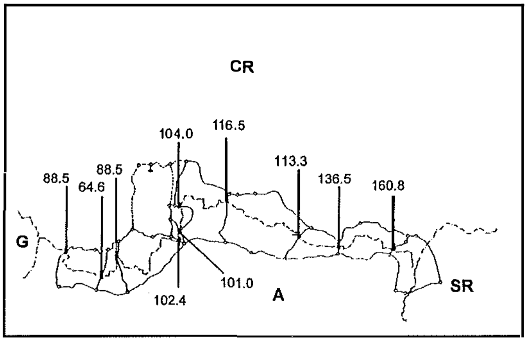


Fig. 5: Height-differences (Austrian minus Czech Trieste Datum) in mm

An explanation of this discrepancies can be based on the following facts:

- The height of point Lišov was determined in the last century with a rms-error of $\pm$ 42 mm and since that time it is used with its original value. This could partly be the source of the differences of height levels. The discrepancies also can partly be explained by the fact that the height difference between the Austrian and the Slovenian networks (taken in the same sense Austrian Trieste Datum minus Slovenian Trieste Datum) reaches the average value of about –100 mm. This difference is especially significant because both networks are territorially close to the reference height at Trieste.
- Increasing values of height differences along the common border of Austria and the Czech Republic in west-east direction are probably caused by different ways of considering the vertical dynamics of the Earth's on the territory along the common border. The fact that in this area the vertical dynamic is very strong is evidenced by Figs. 3 and 4.

References

[1] *Bretterbauer, K.* (1986): Das Höhenproblem der Geodäsie. ÖZfVuPh, 74. Jahrgang, Heft 4, pp. 205 – 215.

[2] *Höggerl, N.* (1986): Die Ausgleichung des österreichischen Präzisionsnivellementnetzes. ÖZfVuPh, 74. Jahrgang, Heft 4, pp. 216 – 249.

[3] *Höggerl, N.* (1995): Contribution of Austria to the UELN 95. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF), Helsinki, 1995. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, 1995, pp. 127 – 130.

[4] *Zeman, A.* (1988): General Trends of Normal Height Changes in Czechoslovakia for a Period of Approximately 33 Years. Journal of Geodynamics, 10, pp. 167 – 174.

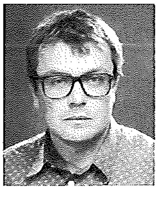
[5] *Zeman, A., Bene, F.* (1995): UELN Activities in the Czech Republic. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF), Helsinki, 1995. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München 1995, pp. 125 – 126.

[6] *Zeman, A.* (1996): Study on Some Relations Among Different Height Systems in Central Europe. Report on the Symposium of the IAG Subcommission for the European Reference Frame (EUREF), Ankara, 1996. To be published.

Anschrift der Verfasser:

o.Univ.-Prof. Dr. Kurt Bretterbauer: Institut für Theoretische Geodäsie und Geophysik, TU Wien, Gußhausstraße 27 – 29, 1040 Wien, Austria

Doc. Antonín Zeman: Czech Technical University in Prague, Department of Advanced Geodesy, Thákurova 7, 166 29 Praha 6 – Dejvice, Czech Republic.



Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit der a posteriori Schätzung der Gewichte

Florijan Vodopivec und Dušan Kogoj, Ljubljana

Zusammenfassung

Die a posteriori-Varianzenschätzung ist ein iterativer Process. Die Beobachtungen können sinnweise in Gruppen vereinigt sein. Die annähernde Anfangswerte der Gruppenvarianzen sind ausgewählt. Die neue Werte der Gruppenvarianzen, die eine Eingangsangabe für den neuen Ausgleich darstellen, sind von der Ergebnisse des Ausgleiches kalkuliert. Der Iterationsprozess konvergiert zu den Erwartungswert der Gruppenvarianzen und der unbekannten Parameter. Vier Methoden sind auf praktischen Exemplären der triangulation-trilateration Netze getestet. Die Vorzüge und die Nachbarkeiten der einzelnen Methoden sind auf Grund der Testenergebnisse festgestellt.

Abstract

The a posteriori determination of variances is an iterative process. In a logical sense, observations can be joint into groups. Approximate initial variance values of the groups are selected. New values of variances the groups are calculated on the basis of the adjustment's results, and represent entrance data for a new adjustment. The iterative process converges to the most probable values of unknown parameters and corrections of measured quantities. Four methods have been tested at practical examples of the triangulation trilateration nets. Based on the testing results, the advantages and disadvantages of each individual method were established.

1. Einleitung

Bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate sind die Genauigkeitsverhältnisse den Beobachtungen im voraus zu bestimmen. Den Beobachtungen werden Gewichte zugeordnet. Diese stellen die Zuverlässigkeit der Meßresultate dar. Es wird vorausgesetzt, daß die Korrelation zwischen den Beobachtungen nicht berücksichtigt ist. In diesem Fall kann man auf relativ einfache Weise auf die Gewichte schließen, sofern die Varianzen der Beobachtungen bekannt sind. Gewöhnlich sind die Varianzen jedoch nicht bekannt und können nur geschätzt werden. Die Schätzung der Varianzen der Beobachtungen vor der Ausgleichung wird „Vorab-Schätzung" oder „a priori-Varianzenschätzung" der Genauigkeit genannt. Diese Methoden geben in den meisten Fällen kein richtiges Bild von der Genauigkeit der Beobachtungen.

Die Genauigkeit der Beobachtungen kann auch auf Grundlage der Ausgleichungsresultate geschätzt werden. Die Schätzung der Genauigkeit nach der Ausgleichung heißt „a posteriori-Varianzschätzung". Wenn das Verhältnis der Varianzen zwischen den Beobachtungen bekannt ist, stellt der mittlere Fehler der Gewichtseinheit nach der Ausgleichung die Bestätigung oder Zurückweisung der a priori-Genauigkeit dar. Ein nicht entsprechend a priori bestimmtes Gewichtsverhältnis bewirkt eine Übertragung der Verbesserungen von einer auf die andere Meßart. Die Folge ist eine unobjektive Schätzung der Genauigkeit der Beobachtungen und der Endresultate. Ein noch größeres Problem ist, daß sich die Koordinatenwerte der neuen Punkte ändern. Dies bewirkt eine „Deformation" des Netzes.

2. Problemlösung

Im linearen Ausgleichungsmodell $\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{Ax}$ (Gauß-Markov-Modell) werden mit Hilfe von Kovarianzmatrix der Beobachtungen Σ_{LL} die unbekannten Parameter $\mathbf{x}$ und die Verbesserungen der Beobachtungen $\mathbf{v}$ geschätzt. Die nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzten Werte der unbekannten Parameter $\mathbf{x}$ sind nur dann die wahrscheinlichsten Werte, wenn die Kovarianzmatrix der Beobachtungen Σ_{LL} bekannt ist. In diesem Fall ist auch die auf Grundlage der Verbesserungen $\mathbf{v}$ geschätzte Varianz der Beobachtungen minimal.

Die Kovarianzmatrix beschreibt die stochastischen Eigenschaften des Vektors der echten Verbesserungen ε; sie wird stochastisches Modell des Vektors der Beobachtungen genannt. Im Falle nicht korrelierter Beobachtungen ist dies eine Diagonalmatrix. Die Kovarianzmatrix ist im allgemeinen nicht bekannt. Ihre Form muß also a priori geschätzt werden. Trotz Berücksichtigung aller Regeln und bei Anwendung der bewährten Methoden bleibt die a priori-Schätzung Σ_{LL} hypothetisch.

Der logische Weg wäre also, neben den unbekannten Parametern $\mathbf{x}$ auch das „Gewicht" (Kofaktormartix) $\mathbf{Q}_{LL}$ als Unbekannte zu betrachten; hierbei versagt das rechnerische Modell allerdings. Einen Ausweg aus dieser Situation bieten Methoden, die gleichzeitig mit der Schätzung der Parameter $\mathbf{x}$ auch eine a posteriori – Schätzung der Verhältnisse der Gewichte zwischen den gemessenen Mengen ermöglichen (Erweiterte Methode der kleinsten Quadrate). Der Allgemeinfall der Schätzung der Varianz und Kovarianz ($\mathbf{Q}_{LL}$ als volle Matrix) ist sehr komplex, deshalb sind die Methoden üblicherweise nur auf die Schätzung der Varianz der Beobachtungen beschränkt ($\mathbf{Q}_{LL}$ als Diagonalmatrix nicht korrelierter Beobachtungen). Eine noch häufigere Lösungsweise basiert auf der Gruppierung der Beobachtungen. A posteriori geschätzte Varianzen einzelner Gruppen geben neue Gruppengewichte, die die Grundlage für eine erneute Ausgleichung bieten. Die Methoden der a posteriori- Varianzenschätzung sind also Iterationsverfahren.

3. A posteriori Schätzung der Gewichte

Für die Gewichte der Beobachtungen müssen deren Schätzungen p bestimmt werden. Die Gewichte p sind in der Regel nicht unmittelbar bestimmt, sondern aus der Schätzung der Varianz s hergeleitet. Neben der in der Geodäsie bereits eingeführten Verfahren beschreibt die Literatur auch zahlreiche andere Möglichkeiten. Eine davon ist die a posteriori - Varianzenschätzung.

Wenn die Gewichte mit Hilfe statistischer Schätzungen bestimmt wurden, ist eine objektive Wahrscheinlichkeit des „Ereignisses" der einzelnen Werte p gewährleistet. Gegeben ist eine Serie von Beobachtungen. Die Serie besteht aus t Gruppen, innerhalb welcher es n_t Beobachtungen gibt. Man setzt voraus, daß innerhalb einer einzelnen Meßgruppe dieselben Genauigkeiten auftreten oder daß die Verhältnisse der Gewichte der Beobachtungen innerhalb einer einzelnen Gruppe bekannt sind.

Auf Grundlage der Ausgleichungsresultate kann die Varianzen der Beobachtungen festgestellt werden, somit können auch die Gewichte a posteriori bestimmt werden. Aus der Maximum-Likelihood-Methode oder direkt aus der Methode der kleinsten Quadrate sind verschiedene Algorithmen zur a posteriori- Varianzenschätzung hergeleitet. Bei allen sind die Varianzen der Gruppen q_t gemeinsam bestimmt. Ausgehend von den entsprechenden ungefähren Werten erhalten wir mit jeder Iteration (neue empirische Gruppenvarianzen $q_{t,\nu}$ (ν-te Iteration). Der Iterationsprozeß wird abgebrochen, wenn die Werte bestätigt werden, wenn also der Eingangswerte der Gruppenvarianzen gleich ihrem Ausgangswerte sind.

Die Methoden der a posteriori-Varianzschätzung werden in der Theorie der Entscheidung zu den Risikosituationen gezählt. Die Gewichte sind nach diesen Methoden mit objektiver Wahrscheinlichkeit geschätzt.

Behandelt werden vier Methoden, benannt nach Autoren, die sie veröffentlichten. Bei allen vier Methoden dient das Gauß-Markov-Modell als funktionales Modell. Die Kovarianz-Matrix der nicht korrelierten Beobachtungen hat folgende Form:

$$\mathbf{Q}_{LL,\nu} = \begin{bmatrix} q_{1,\nu} \cdot \mathbf{I}_1 & & \\ & q_{i,\nu} \cdot \mathbf{I}_i & \\ & & q_{t,\nu} \cdot \mathbf{I}_t \end{bmatrix}$$

Auf Grundlage des bekannten Ausgleichungsalgorithmus und der a priori bestimmten Kofaktormatrix werden die wahrscheinlichsten Werte der unbekannten Parameter und die Verbesserungen der Beobachtungen errechnet:

$$\mathbf{N}_\nu = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{LL,\nu}\mathbf{A}$$
$$\hat{\mathbf{x}}_\nu = \mathbf{N}_\nu^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{LL,\nu}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\nu - \mathbf{l}$$

3.1. Methode nach Helmert

Diese Methode ist auch als „Methode der Ermittlung von Gruppengewichten" bekannt. Sie ist aus der Methode der kleinsten Quadrate hergeleitet.

Der Algorithmus zur Berechnung der Gruppenvarianzen hat die Form:

$$\{\mathbf{K}_i = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}_i^{-1}\}_\nu$$

$$\mathbf{K}_{i,j} = \left\{ \begin{array}{ll} n_i - 2\,\mathrm{tr}(\mathbf{K}_i) + \mathrm{tr}(\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j) & i = j \\ \mathrm{tr}(\mathbf{K}_i\mathbf{K}_j) & i \neq j \end{array} \right\} \nu$$

$$\hat{\mathbf{v}}_{i,\nu} = \{\mathbf{v}^T\mathbf{Q}_{LL}^{-1}\mathbf{v}\}_{i,\nu}$$

$$\hat{\sigma}^2_{\nu+1} = \{\mathbf{K}^{-1}\hat{\mathbf{v}}\}_\nu$$

$$q_{i,\nu+1} = \hat{\sigma}^2_{\nu+1} q_{i,\nu}$$

3.2. Methode nach Kubik

Die Varianzschätzung und die Schätzung der Unbekannten sind aus der Maximum-Likelihood-Methode hergeleitet. Die Varianzen sind zusammen mit den übrigen Unbekannten auf Grundlage der Meßresultate geschätzt.

Die Autoren Kubik und Ebner haben folgenden Iterationsprozeß zur Schätzung nicht verzerrter Gruppenvarianzen ausgearbeitet:

$$\{s_i = \mathbf{v}_i^T\mathbf{v} - n_i q_i + \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_i^T)\}_\nu$$

$$\{\mathbf{H}_{i,j} = -2\mathbf{v}_i^T\mathbf{A}_i\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_j^T\mathbf{v}_j - \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i^T\mathbf{A}_i\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_j^T\mathbf{A}_j\mathbf{N}^{-1}) + n_i q_i^2 \delta_{i,j}\}_\nu$$

$$dp_\nu = \mathbf{H}_\nu^{-1} s_\nu$$

$$q_{i,\nu+1} = q_{i,\nu}(1 + dp_{i,\nu} q_{i,\nu})^{-1}$$

3.3. Methode nach Ebner

Diese Methode ist aus der Methode der kleinsten Quadrate entstanden und hat folgenden Algorithmus:

$$q_{i,\nu+1} = \left\{ \frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v} + \mathrm{tr}(\mathbf{A}_i\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_i^T)}{n_i} \right\}_\nu$$

3.4. Methode nach Förstner

Die Methode geht von den Gleichungen nach Ebner aus, die zur Schätzung der Gruppenvarianzen der Beobachtungen führen. Der Algorithmus lautet:

$$\{\mathbf{Q}_{vv\,i} = \mathbf{Q}_{LL\,i} - \mathbf{A}_i\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}_i^T\}_\nu$$

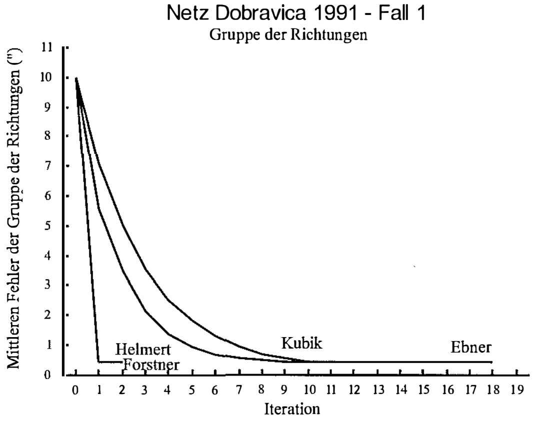
$$\{r_i = \mathrm{tr}(\mathbf{Q}_{vv\,i}\mathbf{Q}_{LL\,i})\}_\nu$$

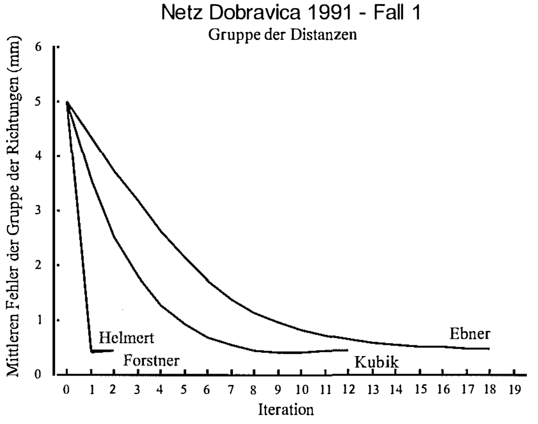
$$q_{i,\nu+1} = \left\{ \frac{\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i}{r_i} \right\}_\nu$$

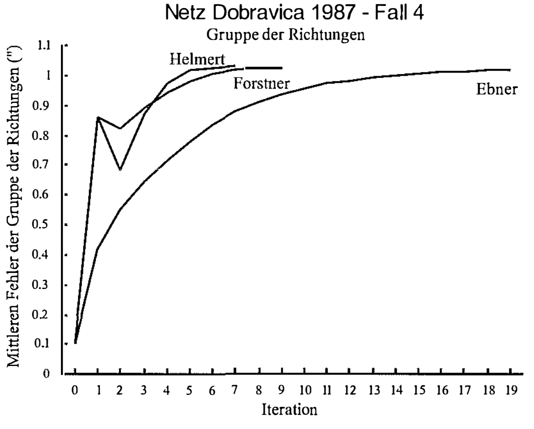
4. Testung der Methoden an praktischen Beispielen geodätischer Netze

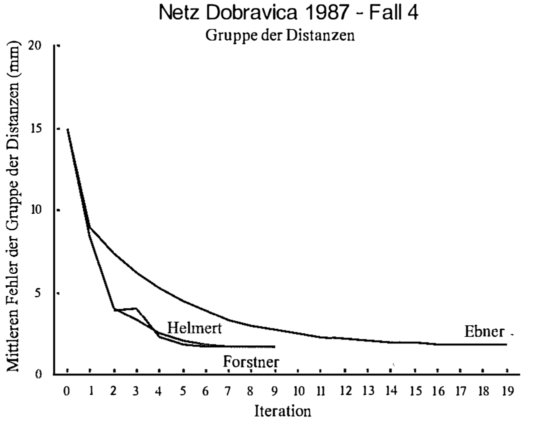
Alle vier Methoden wurden an vier Beispielen ebener geodätischer Triangultions-Trilaterations-Netze getestet. Aus den Ausgleichungsresultaten wurden die Gruppenvarianz der beobachteten Richtungen und die Gruppenvarianz der gemessenen Distanzen geschätzt. Diese Varianzen bilden die Grundlage für die Berechnung der Gruppengewichte in der neuen Ausgleichung. Die vier Testnetze waren:

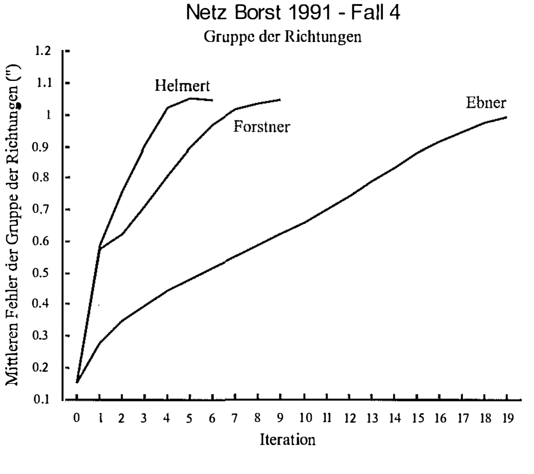
- Netz Kubik 1970
- Netz Boršt 1991 (Entfernungsmesser Kern ME 5000, Theodolit Kern E2)
- Netz Dobravica 1978 (Entfernungsmesser Kern ME 3000, Theodolit Kern E2)
- Netz Dobravica 1991 (Entfernungsmesser Kern ME 3000, Theodolit Kern E2)

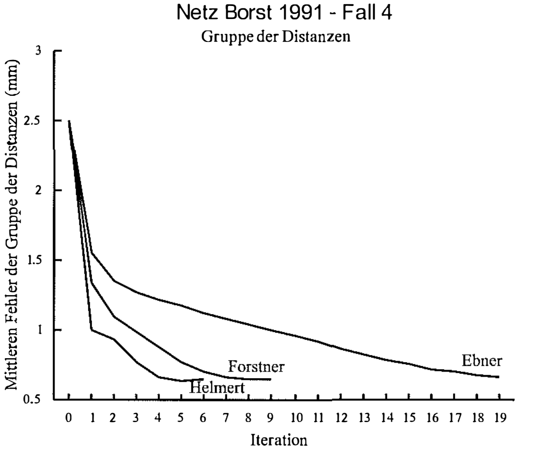

Netz Dobravica 1991 - Fall 1
Gruppe der Richtungen
Mittleren Fehler der Gruppe der Richtungen (")
Helmert
Forstner
Kubik
Ebner
Iteration


Netz Dobravica 1991 - Fall 1
Gruppe der Distanzen
Mittleren Fehler der Gruppe der Richtungen (mm)
Helmert
Forstner
Kubik
Ebner
Iteration


Netz Dobravica 1987 - Fall 4
Gruppe der Richtungen
Mittleren Fehler der Gruppe der Richtungen (")
Helmert
Forstner
Ebner
Iteration


Netz Dobravica 1987 - Fall 4
Gruppe der Distanzen
Mittleren Fehler der Gruppe der Distanzen (mm)
Helmert
Forstner
Ebner
Iteration


Netz Borst 1991 - Fall 4
Gruppe der Richtungen
Mittleren Fehler der Gruppe der Richtungen (")
Helmert
Forstner
Ebner
Iteration


Netz Borst 1991 - Fall 4
Gruppe der Distanzen
Mittleren Fehler der Gruppe der Distanzen (mm)
Forstner
Helmert
Ebner
Iteration

4.1. Eingangsparameter

Die Beobachtungen wurden nach der Meßart in zwei Gruppen eingeteilt, und zwar in die Gruppe der beobachteten Richtungen und in die Gruppe der gemessenen Distanzen. Je nach dem benutzten Instrumentarium und der Beobachtungssmethode wurden für jedes Netz gesondert die Anfangswerte der Gruppengewichte bestimmt – Fall P (Grundfall). Damit wurde die Kovarianz-Matrix der Beobachtungen bestimmt.

Das funktionale und das stochastische Modell stellen die Eingangswerte für den Iterationsprozeß. Für den nächsten Iterationsschritt bekommt man auf Grundlage der Schätzungen der Gruppenvarianzen aus den Ausgleichungsresultaten neue Gruppengewichte und damit ein neues stochastisches Modell. Der Iterationsprozeß endet, wenn das Konvergenzkriterium erfüllt ist.

Die Auswahl der geeignetsten Methode richtet sich nach:

- dem Verlauf der Konvergenz abhängig vom Anfangswert der Gruppenvarianzen,
- der Invarianz des Endresultats des Iterationsprozesses abhängig vom Anfangswert der Gruppenvarianzen,
- der Anzahl der Iterationsschritte,
- der Computerzeit, die für die Berechnung nötig ist.

Damit alle diese Eigenschaften aus den Tests an praktischen Beispielen geodätischer Netze erkennbar werden, wurde das stochastische Grundmodell (Fall P) absichtlich noch zusätzlich verzerrt.

- Fall P: die beiden Anfangswerte der Gruppenvarianzen werden auf Grundlage des angewandten Instrumentariums und der Arbeitsmethode geschätzt,
- Fall 1: die beiden Gruppenvarianzen sind 100 mal größer,
- Fall 2: die Varianz der Gruppe der Richtungen ist 100 mal größer, die Varianz der Gruppe der Distanzen ist 100 mal kleiner,
- Fall 3: die beiden Gruppenvarianzen sind 100 mal kleiner,
- Fall 4: die Varianz der Gruppe der Richtungen ist 100 mal kleiner, die Varianz der Gruppe der Distanzen ist 100 mal größer.

Es wurden 80 Iterationsprozesse durchgeführt. Gemessen wurde auch die Zeit, die für die Computerberechnung nach den einzelnen Methoden benötigt wird. Es wurden zwei Kriterien für die Beendigung des Iterationsprozesses gewählt:

- das Teilkriterium der Unterbrechnung bezieht sich auf den Unterschied zwischen den Werten der Unbekannten in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten,
- das Kriterium der Beendigung (Endkriterium) bezieht sich auf den Wert des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, der nahe genug an 1 sein muß.

4.2. Resultate

Die ausgewählten Graphen zeigen die Werte der mittleren Fehler der Beobachtungsgruppen im Iterationsprozeß bis zur Erfüllung des Teilkriteriums. Aus den Graphen ist der Unterschied in der Geschwindigkeit und Form der Konvergenz für die Berechnungsmethoden ersichtlich.

5. Schlußfolgerungen

Als Endresultat des Iterationsprozesses erhält man die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten. Die Testresultate haben gezeigt, daß im Falle gut gewählter Anfangswerte der Gruppenvarianzen alle Methoden zum selben Endresultat konvergieren.

Probleme treten auf, wenn die Beobachtungen innerhalb einer Gruppe unabhängig sind und die Anzahl der Beobachtungen in dieser Gruppe gleich dem Rang des Netzes ist. Innerhalb der Gruppe ist eine eindeutige Lösung des mathematischen Modells möglich. Die Methoden konvergieren zu unobjektiven werten der Gruppenvarianzen.

In manchen Testfällen treten bei der Berechnung nach Helmerts Methode negative Gruppenvarianzen im Iterationsprozeß auf, die Endresultate sind jedoch trotzdem die wahrscheinlichsten Gruppenvarianzen, ausgenommen bei Fällen, in denen die Werte der Gruppenvarianzen – bewertet nach den übrigen drei Methoden bei Erfüllung des Konvergenzkriteriums – nicht objektiv sind. Das Endresultat der a posteriori-Varianzenschätzung nach Helmert ist in diesen Fällen eine negative Gruppenvarianz einer der Beobachtungsgruppen. Wir behaupten, daß die a posteriori-Varianzenschätzung nach Helmert bezüglich der Anfangswerte der Gruppenvarianzen immer dann invariant ist, wenn die Anfangswerte der Gruppenvarianzen in einem Intervall liegen, für welches gilt, daß die Schätzungen der mittleren Fehler der Beobachtungsgruppen bei Erfüllung des Konvergenzkriteriums reale Werte darstellen. Für die übrigen Methoden gilt diese Behauptung nicht.

Für die Methode nach Kubik gilt, daß sehr gute Anfangswerte der Gruppenvarianzen nötig sind. Da die Berechung nach dieser Methode am kompliziertesten ist und die benötigte Computerzeit deshalb lang ist, erweist sich diese Methode als die am wenigsten geeignete. Für die übrigen Methoden gilt, daß die Abhängigkeit von den Anfangswerten, bei denen die Iteration zu den wahrscheinlichsten Werten der Gruppenvarianzen konvergiert, wesentlich geringer ist. Es genügt bereits, daß wir die Varianzen der Beobachtungen auf Grundlage des angewandten Instrumentariums und der Beobachtungsmethode ungefähr abschätzen.

Die a posteriori-Varianzenschätzung nach Ebner ist die einfachste. Die für einzelne Iterationsschritte benötigte Zeit ist am kürzesten. Die Anzahl der Iterationsschritte ist bei dieser Methode sehr abhängig von der Auswahl der Anfangswerte der Gruppenvarianzen und der Auswahl des Kriteriums der Unterbrechung des Iterationsprozesses. Bei anspruchsvolleren Kriterien erhöht sich die Anzahl der Iterationsschritte stark. Die Konvergenzgeschwindigkeit ist bei dieser Methode am geringsten. Fraglich ist die Auswahl des Konvergenzkriteriums.

Die Anzahl der nötigen Iterationsschritte für die Berechnung die Endwerte der Gruppenvarianzen ist bei Helmerts Methode und Förstners Methode am wenigsten von der Größe der Anfangswerte der Gruppenvarianzen abhängig. Die Tests haben gezeigt, daß die Anzahl nur vom Verhältnis der Anfangswerte abhängt. Sowohl hinsichtlich der für einzelne Iterationsschritte benötigten Zeit, als auch hinsichtlich der Konvergenzgeschwindigkeit gibt es keine wesentlichen Unterschiede zwischen beiden Methoden. Die Anzahl der nötigen Iterationsschritte ist im Vergleich zu Ebners Methode geringer, bei strengeren Unterbrechungskriterien sogar wesentlich geringer. In den Testfällen war die für die Erfüllung des Endkriteriums benötigte Computerzeit wesentlich kürzer (Faktor 0,2 bis 0,7 im Vergleich zu Ebners Methode).

Durch die a posteriori-Varianzenschätzung der Beobachtungen wird die Mengenberechnung in geodätischen Netzen vereinfacht. Die Schätzung der Gewichte im Rahmen des angewandten mathematischen Modells stellt eine Ausweitung der bekannten Ausgleichungsmethode der kleinsten Quadrate dar. Man erhält die wahrscheinlichsten Gewichtswerte und somit auch die wahrscheinlichsten Endresultate.

Literatur

[1] *Ebner H.:* A-posteriori Varianzschätzungen für die Koordinaten unabhängiger Modelle; ZfV Nr. 4/1972,

[2] *Förstner W.:* Ein Verfahren zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten; AVN 11–12/1979

[3] *Förstner W.:* Konvergenzbeschleunigung bei der a-posteriori Varianzschätzung; ZfV Nr.4/1979

[4] *Kogoj D.:* Izbira najprimernejše metode a-posteriori ocene utezi merjenih kolicin geodetskih mrez. Disertation, Ljubljana, Februar 1992.

[5] *Kubik K.:* The Estimation of the Weights of Measured Quantities within the Method of Least Squares; Bulletin Geodesique, No.95/1970

[6] *Link E., Waldbauer G.:* Erfahrungen mit der a-posteriori Schätzung von Varianzen und Kovarianzen photogrametrischer Modellkoordinaten; ZfV Nr. 5/1972

[7] *Pelzer H.:* Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II; Kontaktstudium 1985, Konrad Witter, Salzburg 1985.

[8] *Sellge H.:* Statistische Probleme bei der Ausgleichung direkter, unabhängiger, normalverteilter Beobachtungen mit geschätzten Gewichten; DGK- Reihe C: Dissertationen, Heft Nr. 213, München 1975.

[9] *Welsch W.:* A-posteriori Varianzschätzung nach Helmert; AVN 2/1987

Anschrift der Autoren:

Univ.-Prof. Dr. Florijan Vodopivec, Doc. Dr. Dušan Kogoj, University of Ljubljana, Faculty for Civil and Engineering and Geodetic Engineering, Jamova 2, SL- 61000 Ljubljana, Slovenia