



## Ausgleich mit Kreisen bei vorgegebenen Winkeldifferenzen

Helmuth Späth <sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Fachbereich Mathematik, Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **86** (2), S. 100–102

1998

Bib<sub>T</sub>E<sub>X</sub>:

```
@ARTICLE{Spaeth_VGI_199814,  
  Title = {Ausgleich mit Kreisen bei vorgegebenen Winkeldifferenzen},  
  Author = {Sp{"a}th, Helmuth},  
  Journal = {VGI -- {"0}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und  
    Geoinformation},  
  Pages = {100--102},  
  Number = {2},  
  Year = {1998},  
  Volume = {86}  
}
```



- [10] Scheidegger, A.E.: Beziehungen zwischen Orientationsstruktur der Talanagen und der Klüftstellungen in Österreich. Mitt. Österr. Geograph. Gesellschaft 121(2), 1979
- [11] Scheidegger, A.E., Hantke, R.: Erosion: Bedeutung der Vorzeichnung. INTERPRAEVENT 1996 Tagungspublikation 1, 1996
- [12] Talwani, M., Worzel, J.I., Landisman, M.: Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone, J.Geophys. Res. 64, 1959
- [13] Thenius, E.; Geologie der österreichischen Bundesländer in kurz gefassten Einzeldarstellungen – Niederösterreich. 2. erw. Auflage. Wien, Geologische Bundes-Anstalt, 1974
- [14] Tollmann, A.: Geologie von Österreich, Bd. 2: Ausseralpinen Anteil. Wien, Franz Deuticke, 1985
- [15] Watson, G.S.: Orientation statistics in the Earth sciences. Bull. Geol. Inst. Uppsala N.S., 2(9), 1970
- [16] Wessely, G.: Der Aufschluss auf kalkalpine und subalpine Tiefenstrukturen im Untergrund des Wiener Beckens. Erdöl-Erdgas (Wien/Hamburg) 100, 1984
- [17] Zahn, E.: Gravimetrische Untersuchungen zur Feststellung der Tiefenlage und Struktur der Hauptdolomitoberkante unter sedimentärer Überlagerung in der Marktgemeinde Perchtoldsdorf. Wien, Diplomarbeit TU Wien, 1993

**Anschrift des Autors:**

em.o.Prof. Dr. A. E. Scheidegger, Abt.Geophysik, Technische Universität Wien, Gusshausstrasse 27–29/128–2, A-1040 Wien, Österreich.



## Ausgleich mit Kreisen bei vorgegebenen Winkeldifferenzen

Helmut Späth, Oldenburg

### Zusammenfassung

Wir betrachten den Ausgleich von Meßpunkten in der Ebene mit einem Kreis, wobei den Meßpunkten Kreispunkte mit vorgegebenen Winkeldifferenzen zugeordnet sind. Es werden numerische Verfahren angegeben und diese an einem Beispiel verglichen.

### Abstract

We consider fitting data points in the plane by a circle, when corresponding points on the circle with given angular differences are assigned to those data points. Numerical methods are discussed and compared for some example.

In sich regelmäßig wiederholenden (Zeit-) Intervallen wie Stunden, Tage, Monate oder Jahre seien zu gegebenen Zeitpunkten  $t_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ,  $n \geq 3$ ), für die bei Normierung der Intervalllänge auf  $2\pi$  o. B. d. A.  $0 \leq t_k \pmod{2\pi} < 2\pi$  vorausgesetzt werden kann, Punkte  $(x_k, y_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) in der Ebene gemessen.

Wir suchen zunächst (Verfahren 1) Mittelpunkt  $(a, b)$  und Radius  $r$  eines Kreises so, daß die Summe der Abstandskquadrate von den zu  $t_k$  gehörenden Kreispunkten  $(r \cdot \cos t_k, r \cdot \sin t_k)$  zu den gemessenen Punkten  $(x_k, y_k)$  minimal wird. Somit ist die Zielfunktion

$$S(a,b,r) = \sum_{k=1}^n (x_k - a - r \cos t_k)^2 + (y_k - b - r \sin t_k)^2 \quad (1)$$

zu minimieren. Die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial S}{\partial r} = 0$$

ergeben das lineare 3 x 3 Gleichungssystem (s. a. [2], Formel (4))

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & C \\ 0 & 1 & D \\ C & D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{v} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

wobei

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k \cos t_k + y_k \sin t_k) \quad (3)$$

$$C = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos t_k, \quad D = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin t_k. \quad (4)$$

Bevor wir die explizite Lösung von (2) angeben, untersuchen wir die Größe

$$E = 1 - C^2 - D^2, \quad (5)$$

deren Positivität im Folgenden eine große Rolle spielen wird. Es ist

$$E = 1 - \left( \frac{\sum_{k=1}^n \cos t_k}{n} \right)^2 - \left( \frac{\sum_{k=1}^n \sin t_k}{n} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{n + 2 \sum_{i < k} (\cos t_i \cos t_k + \sin t_i \sin t_k)}{n^2} \\
 &= 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \sum_{i < k} \cos(t_i - t_k) \\
 &\geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Es ist also  $E > 0$  außer für  $\cos(t_i - t_k) = 1$  für alle  $i < k$ , wo  $E = 0$  auftritt. Daher verlangen wir im Folgenden stets  $t_i - t_k \neq 0 \pmod{2\pi}$  für wenigstens ein Paar  $(i, k)$  mit  $i < k$ , was  $E > 0$  garantiert.

Die Matrix im Gleichungssystem (2) ist positiv definit, da ihre Hauptabschnittsdeterminanten 1, 1 und  $E > 0$  sind; ihre Inverse ist

$$\frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 - D^2 & CD & -C \\ CD & 1 - C^2 & -D \\ -C & -D & 1 \end{pmatrix},$$

womit man für  $r$  aus der letzten Gleichung in (2) sofort

$$r = (\bar{v} - C\bar{x} - D\bar{y}) / E \tag{7}$$

erhält. Setzt man (7) in die beiden ersten Gleichungen von (2) ein, so ergeben sich weiter

$$a = \bar{x} - Cr, \quad b = \bar{y} - Dr. \tag{8}$$

Zur besseren Veranschaulichung wählen wir als Beispiel die etwas extremen, nicht gerade fast auf einem Kreis liegenden Punkte  $(x_k, y_k)$  mit zugehörigen Winkeln  $t_k$  aus Tabelle 1. Die gegebenen Punkte (ausgefüllt) und die zugehörigen Kreispunkte (nicht ausgefüllt) sind auch in Fig. 1 zu finden zusammen mit dem nach (7) und (8) berechneten Kreis. Die Zahlenwerte für  $a$ ,  $b$  und  $r$  sind in Tabelle 2 unter Verfahren 1 zu finden. Das Ergebnis sieht nicht gerade erfreulich aus; der Wert für das Abweichungsmaß  $S$  ist groß.

$x_n$	0	3	6	7	5	4	1
$y_n$	2	2	1	3	5	4	4
$t_k$ (Grad)	0	50	100	150	200	250	300

Tabelle 1

	a	b	r	S bzw. T
Verfahren 1	3.6585	3.0322	2.1882	17.9393
Verfahren 2	3.6416	3.0030	2.4696	8.7748
Verfahren 3	3.8788	2.5248	2.5914	6.1929

Tabelle 2

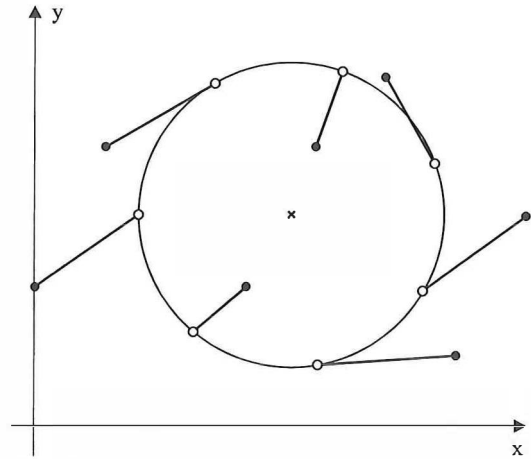


Abb. 1

Daher kommt man auf die Idee, mit dem Winkel  $\alpha$  einen weiteren Parameter einzuführen, der das Ausgangsintervall  $[0, 2\pi)$  für die  $t_k$  auf  $[\alpha, \alpha + 2\pi)$  transformiert, d. h. in (1)  $\alpha + t_k$  statt  $t_k$  mit unbekanntem  $\alpha$  einzusetzen. Dieses Prinzip für das Verfahren 2 stammt aus [1]; die Herleitung ist hier aber bezüglich Existenz einer Lösung vollständig und liefert zwei Lösungen für  $\alpha$ , von denen eine ausgesondert werden muß. Die Zielfunktion lautet jetzt

$$T(a, b, r, \alpha) = \sum_{k=1}^n (x_k - a - r \cos(\alpha + t_k))^2 + (y_k - b - r \sin(\alpha + t_k))^2. \tag{9}$$

Beachtet man

$$\begin{aligned}
 r \cos(\alpha + t_k) &= c \cos t_k - d \sin t_k \\
 r \sin(\alpha + t_k) &= d \cos t_k + c \sin t_k,
 \end{aligned}$$

wobei

$$c = r \cos \alpha, \quad d = r \sin \alpha. \tag{10}$$

zwei neue Unbekannte (statt  $r$  und  $\alpha$ ) sind, so wird aus (9)

$$T(a, b, c, d) = \sum_{k=1}^n (x_k - a - c \cos t_k + d \sin t_k)^2 + (y_k - b - d \cos t_k - c \sin t_k)^2 \tag{11}$$

Die Substitution bewirkt, daß in den notwendigen Bedingungen für ein Minimum, also in

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \frac{\partial T}{\partial b} = \frac{\partial T}{\partial c} = \frac{\partial T}{\partial d} = 0 \tag{12}$$

die Unbekannten – im Gegensatz zu  $\alpha$  – nur noch linear auftreten. Führt man in Ergänzung zu (3) und (4) zur Abkürzung

$$\bar{w} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k \cos t_k - x_k \sin t_k) \tag{13}$$

ein, so ergibt sich für (12) das lineare 4 x 4 Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & C & -D \\ 0 & 1 & D & C \\ C & D & 1 & 0 \\ -D & C & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

dessen symmetrische Koeffizientenmatrix für die für die  $t_k$  gemachten Voraussetzungen ( $E > 0$ ) positiv definit ist, da sie die positiven Hauptabschnittsdeterminanten  $1, 1, E, E^2$  hat. Daher handelt es sich bei der eindeutigen Lösung von (14) um das Minimum von (11).

Mit der Inversen

$$\frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -C & D \\ 0 & 1 & -D & -C \\ -C & -D & 1 & 0 \\ D & -C & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der Koeffizientenmatrix in (14) kann man diese Lösung explizit angeben:

$$a = (\bar{x} - C\bar{v} + D\bar{w}) / E, \quad (15)$$

$$b = (\bar{y} - D\bar{v} - C\bar{w}) / E, \quad (16)$$

$$c = (\bar{v} - C\bar{x} - D\bar{y}) / E, \quad (17)$$

$$d = (\bar{w} + D\bar{x} - C\bar{y}) / E, \quad (18)$$

Mittels (17) und (18) erhält man aus (10) die ursprünglichen Unbekannten  $r$  und  $\alpha$  über

$$r = (C^2 + D^2)^{1/2}, \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = D / C. \quad (20)$$

Für  $\alpha$  ergeben sich aus (20) aber zunächst zwei Werte

$$\alpha_1 = a \tan(D / C), \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \pi, \quad (21)$$

und es muß, um die einem Minimum entsprechende Lösung zu erhalten, nachgerechnet werden, für welchen Wert  $T$  kleiner ausfällt.

In unserem Beispiel ergibt sich so  $\alpha = 27.615^\circ$ ; die Werte für  $a, b$  und  $r$  sind in Tabelle 2 in der Zeile für Verfahren 2 zu finden. Man beachte die stattgefundenene Halbierung der Fehlerquadratsumme gegenüber  $\alpha = 0^\circ$ . Visualisiert sind die Daten und Ergebnisse in Fig. 2.

Zum Vergleich wollen wir noch die Ergebnisse eines Verfahrens 3 [2] angeben, bei dem die  $t_k$  nicht vorgegeben sondern so bestimmt werden, daß zwischen Daten- und Kreispunkten kürzeste Abstände erzwungen werden. Die entsprechende Zielfunktion ist

$$U(a, b, r, t_1, \dots, t_n) = \sum_{k=1}^n (x_k - a - r \cos t_k)^2 + (y_k - b - r \sin t_k)^2. \quad (22)$$

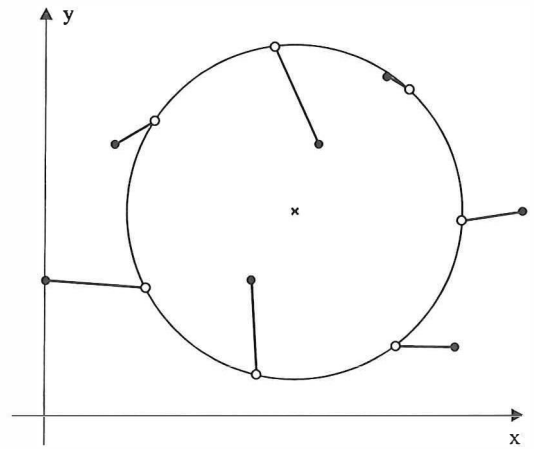


Abb. 2

Die Ergebnisse zu unserem Beispiel findet man in Tabelle 2 und Fig. 3. Gegenüber Verfahren 2 ist die Fehlerquadratsumme gegenüber dem wesentlich aufwendigen Verfahren 3, das mit Iterationen arbeitet, nicht mehr dramatisch kleiner geworden.

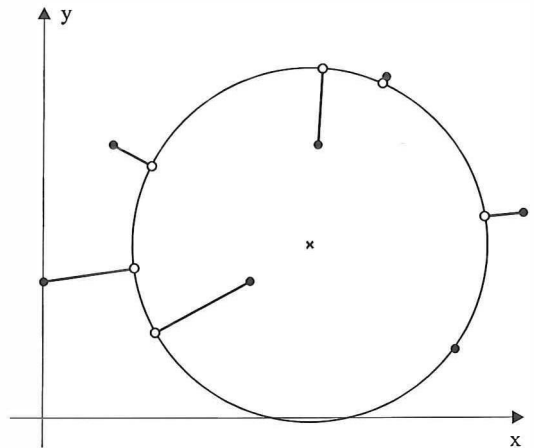


Abb. 3

#### Literatur

- [1] Berman, M.: Estimating the parameters of a circle when angular differences are known. Appl. Stat. 32, 1-6 (1983).
- [2] Späth, H.: Least-squares fitting by circles. Computing 57, 179-185 (1996).

#### Anschrift des Autors:

Prof. Dr. Helmuth Späth, Fachbereich Mathematik, Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany