



Konstruktion von Höhen- und Gefällelinien aus Waveletkoeffizienten

Gert Beyer ¹, Michael Richter ²

¹ *Technische Universität Dresden, Institut für Geometrie, D-01062 Dresden*

² *Industriestraße 6, D-40227 Düsseldorf*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **90** (3–4), S. 109–118

2002

BibT_EX:

```
@ARTICLE{Beyer_VGI_200211,  
  Title = {Konstruktion von H{"o}hen- und Gef{"a"}llelinien aus  
    Waveletkoeffizienten},  
  Author = {Beyer, Gert and Richter, Michael},  
  Journal = {VGI -- {"O}sterreichische Zeitschrift f{"u"}r Vermessung und  
    Geoinformation},  
  Pages = {109--118},  
  Number = {3--4},  
  Year = {2002},  
  Volume = {90}  
}
```





Konstruktion von Höhen- und Gefällelinien aus Waveletkoeffizienten

Gert Beyer, Dresden und Michael Richter, Düsseldorf

Herrn Prof. Dr. H. Stachel zum 60. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung

Die Wavelettransformation hat sich als zweckmäßiges Werkzeug für viele Aufgaben der Signalanalyse, im Besonderen auch für Aufgaben im Geobereich erwiesen. In diesem Artikel wird gezeigt, daß auf der Basis einer wavelettransformierten Höhenmatrix wichtige Folgeprodukte wie Höhen- und Gefällelinien abgeleitet werden können, ohne in den Originalbereich zurücktransformieren zu müssen. Dabei spielen die Approximations- und die Lokalisierungseigenschaft der Wavelettransformation eine wesentliche Rolle.

Abstract

The wavelet transformation became evident as a suitable tool for many problems of signal processing, especially too for problems in geo-field. In this paper is shown, that on the foundation of a wavelet transformed high-matrix essential following products like contour and slope lines can be derivated without applying inverse transformation into the original domain. Hereby the approximation and localisation property become more and more important.

1. Einleitung

In den letzten Jahren erweckte die Wavelettransformation (WT) starkes Interesse in den Geowissenschaften, insbesondere in der Geoinformatik, wie die Zunahme an Publikationen zu diesem Thema zeigt. Die Wavelettransformation ermöglicht unter anderem die Geländeanalyse auf der Basis der (eventuell komprimiert) in Form von Waveletkoeffizienten (WK) gespeicherten Daten, da die Waveletkoeffizienten wesentliche Signaleigenschaften des Geländes repräsentieren.

Für viele Anwendungen im Geo-Bereich sind Höhenlinien, Geländeneigung und Gefällelinien wichtige Größen (z.B. Verkehrswegeplanung, Abflußgebiete, Hochwasservorhersage, erosions- oder lawinengefährdete Hänge usw.); mitunter wird auch die Krümmung benötigt [1].

Die Ableitung von Höhen- und Gefällelinien wird durch eine spezielle Eigenschaft der Wavelettransformation, die Approximationseigenschaft, möglich. Die Wavelettransformierte eines Signals, multipliziert mit einem skalenabhängigen Faktor, approximiert die n -te Ableitung des Signals durch Grenzübergang des Skalenparameters $a \rightarrow 0$, sofern das benutzte Wavelet von n -ter Ordnung ist [6]. Die für die kontinuierliche WT nachgewiesene Approximationseigenschaft läßt sich auch für die diskrete WT zeigen [3]. Sie ist damit auch auf diskret gegebene Daten, wie sie in der Geoinformatik vorwiegend vorkommen, anwendbar.

Bekannt Beziehungen der Differentialgeometrie, über die aus den Ableitungen die nötigen

geometrischen Größen ermittelt werden können, ermöglichen die Generierung von Höhen- und Gefällelinien aus den WK.

In dieser Arbeit werden diesbezügliche Algorithmen auf der Basis der diskreten WT vorgestellt. Die bereits gespeicherten Waveletkoeffizienten werden dabei als vorhandene Primärdaten angesehen.

2. Wavelettransformation

Die Wavelettransformation ist wie die Fouriertransformation eine Integraltransformation, die ein Signal im Zeit- bzw. Ortsbereich in einen Bildbereich (hier: Waveletbereich) transformiert, in dem das Signal bezüglich einer geeigneten Funktionsbasis beschrieben wird, wodurch bestimmte Eigenschaften des Signals sichtbar gemacht werden können.

Auf eine Darstellung der Theorie der Wavelettransformation wird an dieser Stelle bewußt verzichtet. Dazu gibt es eine Reihe vorzüglicher Monographien und Artikel ([4], [6], [8]). Für das hier vorgestellte Verfahren zur Erzeugung von Höhen- und Gefällelinien soll lediglich auf die zu Grunde gelegte Datenstruktur eingegangen werden.

Die diskrete Wavelettransformation läßt sich zweckmäßig mit Hilfe der Matrizenrechnung beschreiben. Eine diskrete Signalfunktion mit n Werten kann als Vektor $f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^T$ aufgefaßt werden. Ein Wavelet ist dann ebenfalls eine diskrete Funktion $[0 \ \dots \ 0 \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_s \ 0 \ \dots \ 0]^T$ mit n

Werten, von denen jedoch nur s Werte verschieden von Null sind. Im folgenden soll nur der auf den sogenannten Support s beschränkte Teilvektor als Waveletvektor $\underline{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_s]^T$ bezeichnet werden.

Die Waveletkoeffizienten w_i entstehen als Skalarprodukte

$$w_i = \underline{f}_i^s \cdot \underline{v} \text{ mit } \underline{f}_i^s = [f_i \ f_{i+1} \ \dots \ f_{i+s-1}]^T,$$

wobei das Wavelet gewissermaßen zyklisch über das Signal „geschoben“ wird.

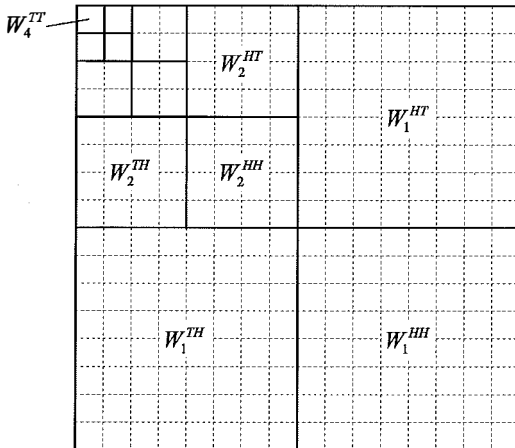


Abb. 1: Datenstruktur der WK bei der zweidimensionalen FWT.

Die diskrete Wavelettransformation bildet das Signal in Waveletkoeffizienten unterschiedlicher Skalen ab. Bei der sogenannten Schnellen Wavelettransformation (FWT, Fast Wavelet Transformation) wird durch immer stärkeres Ausdünnen der Skalen von fein zu grob die Redundanz beseitigt und die Signalmatrix (bei der zweidimensionalen WT) in eine WK-Matrix der gleichen Dimension abgebildet. Die bei der zweidimensionalen WT benutzten Tensorproduktwavelets entstehen aus den vier möglichen Paarungen aus Wavelet v^h (Hochpaß) und Skalierungsfunktion v^t (Tiefpaß) der eindimensionalen Wavelettransformation. Die vier zweidimensionalen Wavelets, $HH = v^h v^{hT}$, $HT = v^h v^{tT}$, $TH = v^t v^{hT}$ und $TT = v^t v^{tT}$ liefern dann in jeder Skale i vier Teilmatrizen W_i^{HH} , W_i^{HT} , W_i^{TH} und W_i^{TT} ($i = 1, \dots, k$), von denen jeweils die Matrix W_i^{TT} wie das Ausgangssignal weiter transformiert wird. Die entstehende Datenstruktur ist in Abb. 1 zu sehen.

Für die Analyse der Geländemodelle im Waveletbereich ist die Approximationseigenschaft im unmittelbaren Zusammenhang mit der Lokalisierungseigenschaft von Bedeutung. Die Waveletkoeffizienten sind bei einem Wavelet n -ter Ord-

nung proportional zur n -ten Ableitung der transformierten Funktion. Neben der Bestimmung des Proportionalitätsfaktors ist auch die genaue Lokalisierung für die Analyse wichtig. Es zeigt sich, daß durch den endlichen Support bei den meist asymmetrischen Wavelets die Indizierung der Waveletkoeffizienten nicht unmittelbar als Maß für die Lokalisierung geeignet ist (vgl. [2], [5]). Unter Berücksichtigung der dort beschriebenen Korrekturgrößen kann man aus der Matrix der WK unmittelbar die Matrizen der partiellen Ableitungen entnehmen.

3. Differentialgeometrische Beziehungen

Zur Ermittlung der Höhen- und Gefällelinien benötigt man ihre Richtung in den Punkten des vorliegenden Höhenmodells.

Ist die Geländefläche F (Relief) durch eine Funktion $z = f(x, y)$ gegeben, so lassen sich aus den partiellen Ableitungen nach x und y die genannten differentialgeometrischen Eigenschaften des Geländes, wie Neigung, Krümmung und Richtung der Höhenlinien bestimmen. Aus den ersten partiellen Ableitungen z_x und z_y ergeben sich unmittelbar die Tangenteinheitsvektoren \underline{t}_x und \underline{t}_y in x - und y -Richtung zu

$$\underline{t}_x = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{bmatrix}, \underline{t}_y = \frac{1}{\sqrt{1+z_y^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Der Flächennormaleneinheitsvektor ergibt sich über das Kreuzprodukt zu

$$\underline{n}_F = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Daraus lassen sich schließlich der Tangenteinheitsvektor \underline{v}_g an die Gefällelinie g und der Richtungseinheitsvektor \underline{t}_h der Höhenlinie h bestimmen:

$$\underline{v}_g = \frac{1}{\sqrt{(1+z_x^2+z_y^2)(z_x^2+z_y^2)}} \begin{bmatrix} -z_x \\ -z_y \\ -z_x^2 - z_y^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{t}_h = \underline{v}_g \times \underline{n}_F = \frac{1}{\sqrt{z_x^2+z_y^2}} \begin{bmatrix} -z_y \\ z_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Algorithmen

Im Abschnitt 2 wurde der Zusammenhang zwischen der Wavelettransformierten der Höhenmatrix eines Geländemodells und den partiellen Ableitungen der durch die Höhenmatrix definierten

diskreten Flächenfunktion genannt, und im Abschnitt 3 wurden die Beziehungen angegeben, mit denen aus den partiellen Ableitungen einer Flächenfunktion die differentialgeometrischen Größen eines Geländemodells, die für die Ermittlung der Höhen- und Gefällelinien benötigt werden, bestimmt werden können.

Wie können nun aus der Wavelettransformierten, die unter bestimmten Voraussetzungen als Vektorfeld der Gradienten aufgefaßt werden kann, die Höhen- und Gefällelinien abgeleitet werden?

In diesem Abschnitt werden Algorithmen vorgestellt, die diese Aufgabe lösen. Die über den Rahmen dieser Publikation hinausgehenden Details sind in [7] dokumentiert.

4.1 Interpolation der Waveletkoeffizienten

Da die Polygonpunkte der zu konstruierenden Höhen- und Gefällelinien auf beliebige Koordinaten fallen können, die Waveletkoeffizienten jedoch nur auf einem Gitternetz vorliegen, müssen die Tangentenrichtungen eines beliebigen Punktes aus den vorhandenen Werten interpoliert werden. Als sinnvolles Verfahren dafür erweist sich die bilineare Interpolation aus den Waveletkoeffizienten der vier benachbarten Gitterpunkte. Eine Interpolation höherer Ordnung ergäbe zwar einen glatteren Verlauf der Tangentenrichtungen an den Gitterlinien (keine Unstetigkeitsstelle in der ersten Ableitung), würde aber am Rand des Bearbeitungsgebietes zu größeren Streifen führen, in denen keine Interpolation der Waveletkoeffizienten möglich wäre. Ist das Bearbeitungsgebiet nur Teil des erfaßten Gesamtgebietes (z. B. durch Zerlegung des erfaßten Gebietes in Bearbeitungsgebiete), so läßt sich dieses Problem teilweise durch Überlappung benachbarter Bearbeitungsgebiete beheben.

Die Interpolation der beiden benötigten Koeffizienten $HT(x,y)$ und $TH(x,y)$ erfolgt getrennt aus den Werten der zugehörigen Matrizen. Für einen beliebigen Punkt $\underline{x} = [x \ y]^T$ erhalten wir $HT(x, y)$ dann nach

$$HT(x,y) = \frac{y_E - y}{\Delta y} \left(\frac{x_E - x}{\Delta x} HT(x_A, y_A) + \frac{x - x_A}{\Delta x} HT(x_E, y_A) \right) + \frac{y - y_A}{\Delta y} \left(\frac{x_E - x}{\Delta x} HT(x_A, y_E) + \frac{x - x_A}{\Delta x} HT(x_E, y_E) \right) \quad (4)$$

wobei x_A, x_E und y_A, y_E die Anfangs- und Endkoordinaten des Gittersegments mit den Gitterweiten Δx und Δy sind, in dem der allgemeine Punkt

$P(x, y)$ liegt. Die Berechnung des Waveletkoeffizienten $TH(x, y)$ erfolgt analog.

4.2 Höhenlinien

Ausgehend von einem Startpunkt x_n , dessen Lage und Höhe bekannt sein muß, kann die Höhenlinie mit Hilfe der Richtungsvektoren \underline{t}_h sukzessive jeweils in Tangentenrichtung verfolgt werden. Dabei sind notwendige Zwischenwerte, die zu Punkten gehören, die keine Gitterpunkte sind, gemäß (4) zu interpolieren. Die Punktfolge, die iterativ nach

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + s \cdot \underline{t}_h \quad (5)$$

berechnet werden kann, wird erwartungsgemäß, insbesondere bei gleichbleibender Orientierung der Krümmung, von der tatsächlichen Höhenlinie abdriften. Dieser Effekt ist in Abb. 2, in der eine Höhenlinie eines halbkugelförmigen Geländes wiedergegeben ist, deutlich zu sehen.

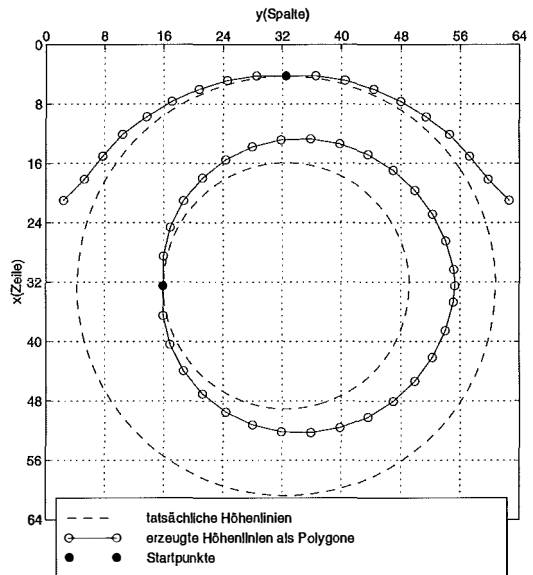


Abb. 2: Abdriften des Verfolgungsalgorithmus ohne Modifikation.

Um dieses Abdriften zu kompensieren, wurde der Algorithmus geeignet modifiziert. Dazu wird nach einem einfachen Prinzip indirekt die Krümmung der Höhenlinie berücksichtigt. Der Grundgedanke geht von den folgenden Voraussetzungen aus:

- Die Krümmung der Höhenlinien zwischen den Polygonpunkten ist konstant.
- Die Niveaulinien sind in der Umgebung der Polygonpunkte parallel.

Die Tangentenrichtungen in P und Q' unterscheiden sich um weniger als 90° ($|\gamma| < \frac{\pi}{2}$).

Diese Voraussetzungen gelten beispielsweise für die Höhenlinien an einer Halbkugel und können durch Anpassen der Schrittweite s auch an realen Datensätzen annähernd erfüllt werden.

Und zwar kann der berechnete Höhenlinienpunkt Q' zur Korrektur radial in Richtung der Höhenlinie verschoben werden. Die Krümmung bzw. der Krümmungsradius ergeben sich mit den o.g. Voraussetzungen indirekt aus der Tangentenrichtung an die Höhenlinie im Punkt Q' (Abb. 3).

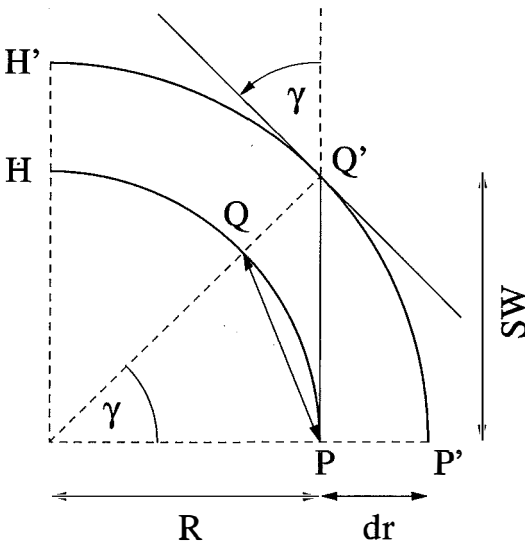


Abb. 3: Geometrische Beziehungen, die der Modifikation I zu Grunde liegen.

Der Radius der kreisförmig angenommenen Höhenlinie ergibt sich zu

$$R = \frac{s}{\tan \gamma} \quad \text{mit} \quad \tan \gamma = \frac{\| \underline{t}_h^P \times \underline{t}_h^{Q'} \|}{\underline{t}_h^P \cdot \underline{t}_h^{Q'}} \quad (6)$$

Daraus folgt wegen

$$\overline{PQ} = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{und} \quad r_{PQ} = \frac{\underline{t}_h^P}{\| \underline{t}_h^P \|} + \frac{\underline{t}_h^{Q'}}{\| \underline{t}_h^{Q'} \|} \quad (7)$$

für den gegenüber (5) verbesserten Iterationsschritt

$$\underline{x}_Q = \underline{x}_P + \overline{PQ} \cdot \frac{r_{PQ}}{\| r_{PQ} \|} \quad (8)$$

Der Test an einer Halbkugel zeigt, daß mit dieser Verschiebung der Algorithmus einen „idealen“ Polygonzug liefert, dessen Punkte alle auf den tatsächlichen Höhenlinien liegen (Abb. 4).

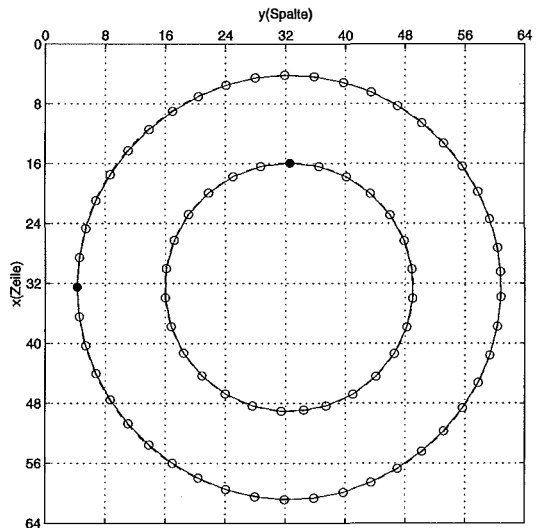


Abb. 4: Höhenlinienbild einer Halbkugel nach Modifikation I.

Für reale Datensätze, welche die oben genannten Beschränkungen nicht erfüllen, treten natürlich weiterhin Abweichungen von der Referenzhöhenlinie auf. Diese sind allerdings wesentlich weniger systematisch als ohne die Verschiebung, wodurch das Abdriften stark reduziert wird.

Eine weitere Verbesserung gegenüber der beschriebenen Modifikation I wurde erwartet, wenn die Voraussetzung der Parallelität der Höhenlinien nicht gefordert wird. Da sich diese Erwartungen jedoch in den Tests nicht signifikant erfüllten, soll diese Modifikation II hier nicht weiter ausgeführt werden.

Im Abschnitt 5 werden die Ergebnisse anhand von Tests an realen Daten diskutiert.

4.3 Gefällelinien

Die Berechnung der Gefällelinien erfolgt nach einem analogen Verfolgungsalgorithmus. Im Prinzip ist im o. g. Algorithmus nur die Tangentenrichtung \underline{t}_h an die Höhenlinie durch die Richtung \underline{v}_g der Gefällelinie zu ersetzen:

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n + s \cdot \underline{v}_g \quad (9)$$

Gegenüber den Höhenlinien gibt es bei den Gefällelinien einige Besonderheiten. Zum einen ist die Vorgabe eines Startpunktes mit bekannter Höhe nicht erforderlich. Der Startpunkt kann problemabhängig beliebig gewählt werden. Zum anderen sind Gefällelinien nicht „parallel“, sondern im Talbereich konvergieren sie sogar. Das hat zur Folge, daß das beim Standardverfolgungsal-

gorithmus erwartungsgemäße Abdriften gedämpft wird, was jedoch in Abhängigkeit von der gewählten Schrittweite zu einem Pendeln der berechneten Gefällelinie führen kann. Im Beispiel des Testdatensatzes eines gekrümmten Tals (Abb. 5) ist dieser Effekt deutlich sichtbar (Abb. 6).

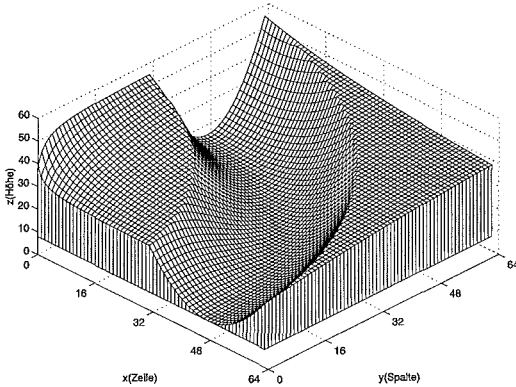


Abb. 5: Gekrümmtes Tal als Testdatensatz.

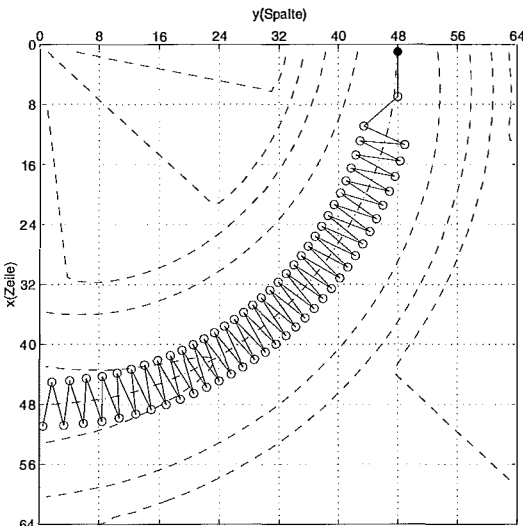


Abb. 6: Gefällelinie ohne Modifikation.

Dieses Pendeln läßt sich nur verringern, wenn es gelingt, die einzelnen Polygonpunkte näher an die tatsächliche Gefällelinie heranzuschieben. Zu diesem Zweck soll der Standardalgorithmus auf ähnliche Weise modifiziert werden wie das bei den Höhenlinien geschehen ist. Die erste Verbesserung, im folgenden Modifikation A genannt, ist stark an die weiter vorn beschriebene Modifikation I des Höhenlinienalgorithmus angelehnt. Die dortigen Bezeichnungen werden des-

halb übernommen, d.h. der aktuelle Polygonpunkt der Gefällelinie ist P, der zu berechnende ist Q usw.

Für diese Modifizierung müssen wieder einige Einschränkungen getroffen werden, die als Voraussetzungen für die folgenden Ableitungen dienen:

- Die Krümmung der Gefällelinien zwischen den Polygonpunkten ist konstant.
- Die Höhenlinien verlaufen in der Umgebung der Gefällelinie geradlinig.
- Die Neigungsrichtungen in P und Q' unterscheiden sich um weniger als 90° ($|\gamma| < \frac{\pi}{2}$).

Da die Höhenlinien die Gefällelinien senkrecht schneiden, könnte man die zweite Bedingung auch so formulieren: Die Gefällelinien in der Nähe der Polygonpunkte müssen parallel sein. Wir erhalten dann genau die Voraussetzungen der weiter vorn beschriebenen Modifikation für die Höhenlinien. Ersetzen wir die Höhenlinienkreise H und H' aus Abb. 3 in Gedanken durch Gefällelinien, erhalten wir eine adäquate Darstellung für die Modifikation A. Die Formeln (6) bis (8) können wir deshalb ohne nochmalige Herleitung übernehmen. Einzig die Tangentenrichtungen der Höhenlinien müssen durch die Neigungsrichtungen ersetzt werden.

Wird am Modell des gekrümmten Tals die gleiche Gefällelinie wie in Abb. 6 mit Modifikation A berechnet, so kommt das Ergebnis der tatsächlichen Gefällelinie schon wesentlich näher, obwohl Bedingung zwei (geradlinige Höhenlinien) nicht erfüllt ist (Abb. 7).

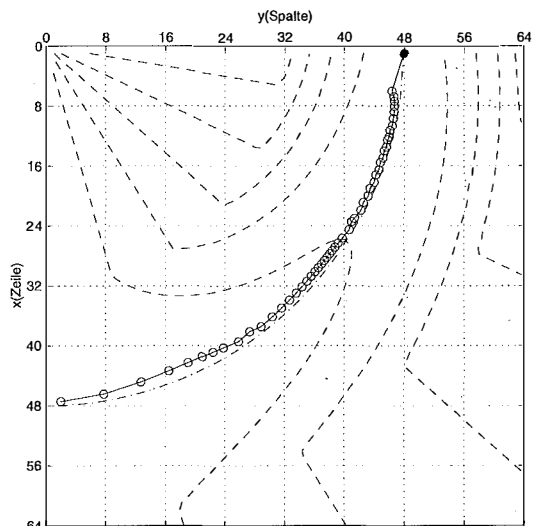


Abb. 7: Gefällelinie nach Modifikation A.

Trotz der akzeptablen Ergebnisse an den Testdatensätzen hat Modifikation A einige Mängel. So wird angenommen, daß die Höhenlinien in der Nähe der Polygonpunkte geradlinig verlaufen. Dies ist für eine typische Gefällelinie, die in einem Tal verläuft, absolut unzutreffend. Dementsprechend ist auch nicht zu erwarten, daß die Neigungsrichtungen in Q und Q', wie angenommen, parallel sind. Vielmehr tendieren sie dazu, talabwärts zu konvergieren, wie auch in Abb. 8 angedeutet ist.

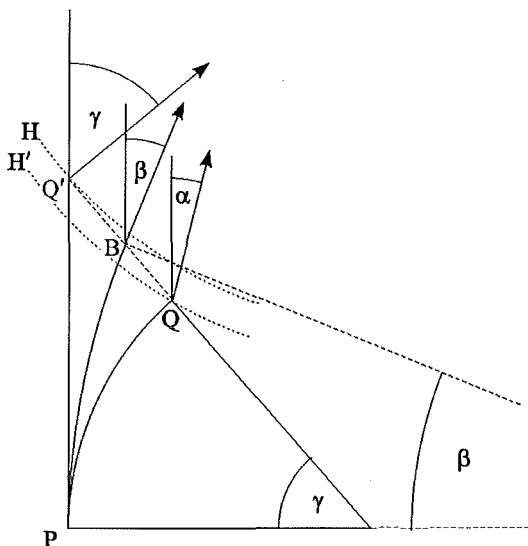


Abb. 8: Geometrische Beziehungen, die für Modifikation B ausgenutzt werden.

Die tatsächliche Neigungsrichtung α im Punkt Q weicht demnach im Allgemeinen von der Richtung γ der Tangente an den Gefälleinienbogen ab. Das hätte eine abrupte Richtungsänderung der erzeugten Gefälleinie an dieser Stelle zur Folge. Da ein solcher Knickpunkt in der Gefälleinie untypisch wäre, soll in Modifikation B der Punkt B auf der Gerade QQ' gesucht werden, in dem der Gefälleinienbogen PB genau in die Neigungsrichtung β übergeht. Dazu gehen wir davon aus, daß sich die Neigungsrichtung auf der Strecke Q'Q (und über Q hinaus) linear verändert. Aus den gegebenen geometrischen Zusammenhängen läßt sich analog zur Modifikation A die Länge der Strecke Q'B und damit der verbesserte neue Gefälleinienpunkt B bestimmen.

Mit dieser weiteren Modifikation des Algorithmus konnte ein wesentlicher Qualitätssprung bei der Berechnung der Gefälleinien erreicht werden. Das Beispiel des gekrümmten Tals zeigt das deutlich (Abb. 9).

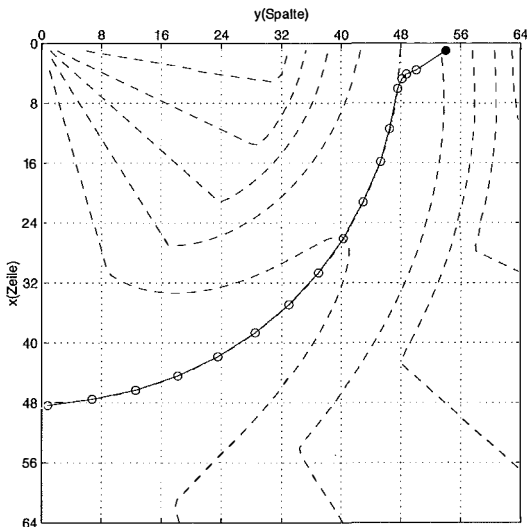


Abb. 9: Gefälleinie nach Modifikation B.

Die Konvergenz im Talbereich hat weiterhin zur Folge, daß im Rahmen der möglichen Genauigkeit mehrere Gefälleinien in eine gemeinsame Gefälleinie münden. Deshalb wird während der Berechnung immer geprüft, ob es einen Schnittpunkt mit einer bereits berechneten Gefälleinie gibt. Existiert ein Schnittpunkt, wird die aktuelle Gefälleinie dort abgeschnitten und beendet.

5. Anwendung auf Geländemodelle

Die entwickelten Algorithmen wurden bisher nur an Modellen regelmäßiger geometrischer Objekte getestet, welche bestimmte Bedingungen erfüllen, die bei der Herleitung der Verfahren vorausgesetzt wurden. Auf diese Weise konnte die Richtigkeit der Herleitung und Implementierung geprüft werden. Da die gestellten Voraussetzungen an realen Höhenmodellen im Allgemeinen nicht gelten, ist bei der Anwendung der Algorithmen mit Fehlern der erzeugten Höhen- und Gefälleinien zu rechnen.

Anhand eines realen Datensatzes soll die Qualität der entwickelten Algorithmen getestet werden. Als Testdatensatz dient ein Höhenmodell des Gebietes der Schnealpe etwa 70 km südwestlich von Wien. Dieser Datensatz wurde uns freundlicherweise vom Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der TU Wien zur Verfügung gestellt. Der Datensatz enthält 414 mal 413 Höhenpunkte auf einem regulären Gitter mit 25 m Rasterweite. Ein bedeutender Teil dieses Gebietes wird von einem Hochplateau bei etwa

1800 m Höhe eingenommen, das bis zum Rand des Datensatzes auf zirka 800 m abfällt. Da das Gesamtgebiet für den Test zu umfangreich war, wurde ein Ausschnitt mit 64 mal 64 Werten ausgewählt, der im Ausgangsdatsatz die Indizes (263;33) bis (326;96) hat. Es handelt sich dabei um einen Berggipfel von unregelmäßiger Form, der ausgewählt wurde, um möglichst lange, geschlossene Höhenlinien untersuchen zu können. An solchen Niveaulinien ist aufgrund der bevorzugten Krümmungsrichtung mit besonders starkem Abdriften zu rechnen.

Zur Verifizierung der erzeugten Höhenlinien werden möglichst fehlerfreie Vergleichsisolinien benötigt. Da die Implementierung der Algorithmen in MATLAB erfolgte, sollen aus praktischen Gründen mit dem MATLAB- Befehl *contour* generierte Niveaulinien als Referenz verwendet werden. Die zugehörige Dokumentation enthält leider keine Details über das zugrundeliegende Verfahren. Dennoch scheint es durchaus legitim, die MATLAB-Höhenlinien als Referenzniveaulinien zu verwenden.

Als Startpunkte für die Höhenlinienalgorithmen werden jeweils die mittleren Punkte der MATLAB-Höhenlinienpolygone genutzt. Für Höhenlinien, die das Bearbeitungsgebiet verlassen, wird so sichergestellt, daß der Startpunkt nicht auf dem Randstreifen liegt, auf dem keine Berechnung der Tangentenrichtung möglich ist. Bei geschlossenen Niveaulinien ist diese Wahl willkürlich.

Der Standardalgorithmus für die Höhenlinien liefert das Ergebnis in Abb. 10.

Das Ergebnis nach Anwendung der Modifikationen I und II ist in Abb. 11 zu sehen. Wie bereits in Abschnitt 4 erwähnt, sind kaum Unterschiede in der Qualität zu erkennen.

Ein erster visueller Vergleich für die Schrittweite $s = 1$ zeigt, daß die Ergebnisse der modifizierten Algorithmen über weite Strecken nahezu deckungsgleich mit den MATLAB- Höhenlinien sind. Die Niveaulinien des Standardalgorithmus weichen hingegen deutlich von diesen ab. Auch für andere Schrittweiten konnte das signifikant

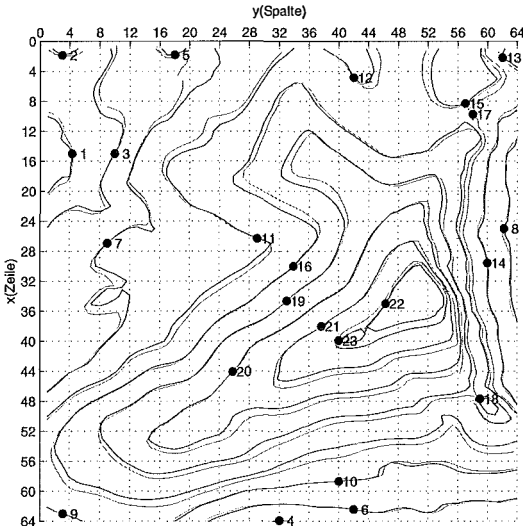


Abb. 10: Höhenlinienbild (rot) des Datensatzes Schneepalpe nach dem Standardalgorithmus. Die Referenzhöhenlinien sind schwarz hinterlegt.

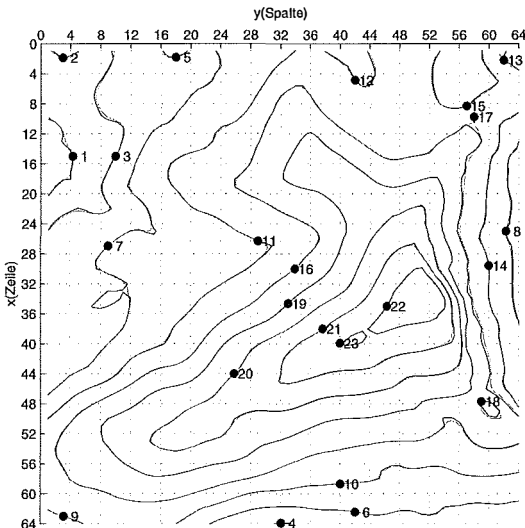
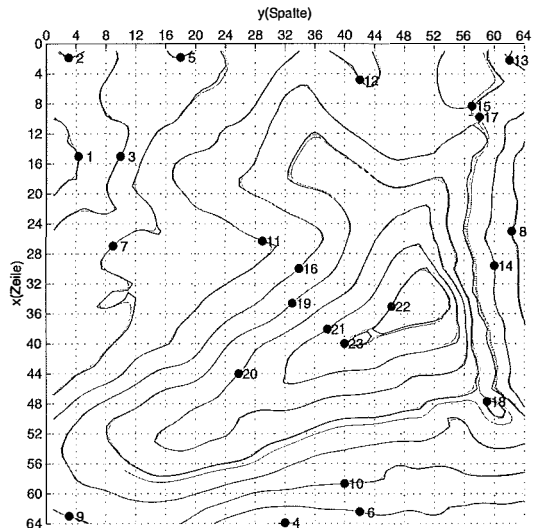


Abb. 11: Höhenlinienbild (rot) des Datensatzes Schneepalpe nach Modifikation I (links) und nach Modifikation II (rechts). Die Referenzhöhenlinien sind schwarz hinterlegt.



stärkere Abdriften des Standardverfahrens gegenüber Modifikation I und II festgestellt werden. Ein Unterschied zwischen den beiden verbesserten Algorithmen ist hingegen kaum auszumachen.

Um den Vergleich der Algorithmen auch quantitativ durchführen zu können, wurde von allen berechneten Punkten der Abstand von der Referenzhöhenlinie bestimmt. Der Mittelwert aller dieser Abstände läßt eine gewisse quantitative Aussage über die Qualität der Algorithmen zu. Für unterschiedliche Schrittweiten sind diese mittleren Abweichungen in Abb. 12 dargestellt. Deutlich ist die bereits optisch in den Abb. 10 und 11 wahrzunehmende Verbesserung der Qualität

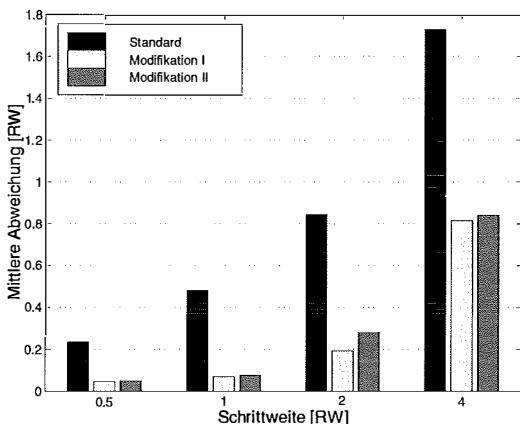


Abb. 12: Vergleich der Abweichungen von der Referenzhöhenlinie.

durch die Modifikationen I und II zu sehen. Auch ist zu erkennen, daß die Modifikation II keine weitere Verbesserung bringt.

Ebenso sollen die Gefällelinialgorithmen am Höhenmodell eines realen Testgebietes verglichen werden. Dazu wurde wiederum ein 64 mal 64 Rasterpunkte großer Ausschnitt des weiter vorn beschriebenen Testdatensatzes „Schneealpe“ genutzt. Das Teilgebiet hat in den Ausgangsdaten die Indizes (317,330) bis (380,393) und wurde so ausgewählt, daß sowohl schmale, tief eingeschnittene Täler als auch flachere Bereiche enthalten sind. Dieser Geländeausschnitt soll im folgenden mit Testdatensatz 2 bezeichnet werden.

Die vier ausgewählten Startpunkte für die Gefällelinien (numeriert mit eins bis vier) verteilen sich gleichmäßig über das Testgebiet.

Leider stehen für die Analyse der Gefällelinien keine unabhängig von den entwickelten Algorithmen erzeugten Referenzgefällelinien zur Verfügung. Der Verlauf der Gefällelinien ist daher nur anhand von Höhenlinien verifizierbar, welche die Gefällelinien senkrecht schneiden sollten. Da ein optischer Vergleich der Ergebnisse unter diesen Umständen schwierig ist (Abb. 13), soll eine indirekte Methode zur Beurteilung der Qualität dieser Gefällelinien verwendet werden, die im folgenden erläutert wird.

In beiden modifizierten Algorithmen wird zunächst eine Verkürzung der Schrittweite vorgenommen, wenn sich die Neigungsrichtungen im aktuellen Punkt und in der ersten Näherung für

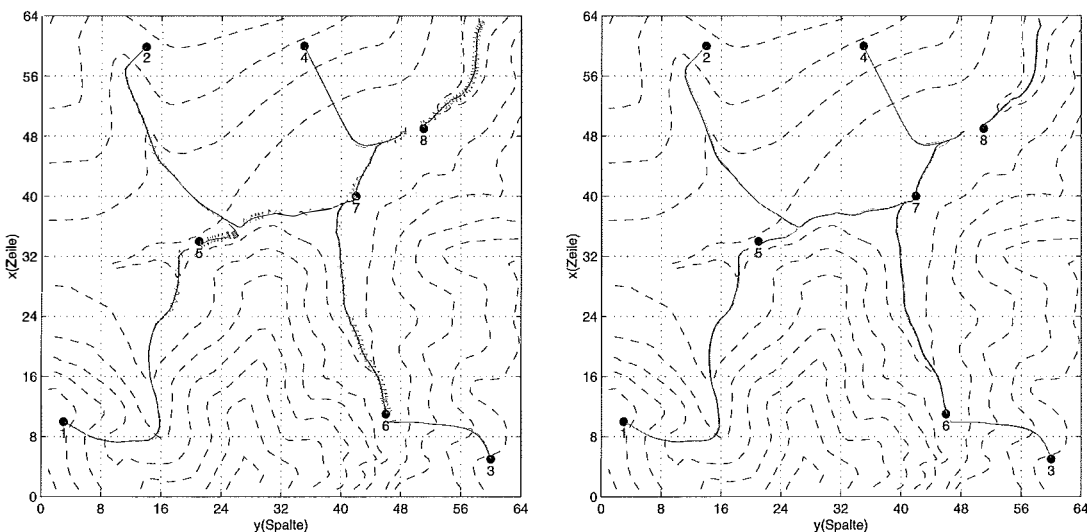


Abb. 13: Links: Gefällelinien des Datensatzes Schneealpe ohne Modifikation (rot). Die Modifikation B ist schwarz hinterlegt. Rechts: Gefällelinien nach Modifikation A (rot) und Modifikation B (schwarz).

den nächsten Polygonpunkt Q' um mehr als 90° unterscheiden. Es gibt zwei Hauptgründe für eine derart starke Änderung der Neigungsrichtung. Zum einen kann die Gefällelinie tatsächlich eine sehr starke Richtungsänderung erfahren, was für beide Algorithmen in gleichem Maße zu Schrittweitenverkürzungen führen würde. Die zweite mögliche Ursache ist die Lage des aktuellen Punktes P neben der tatsächlichen Gefällelinie. Das führt im Allgemeinen dazu, daß die erste Näherung des folgenden Punktes auf die gegenüberliegende Seite der Talsohle fällt. Dort ist mit einer nahezu entgegengesetzten Neigungsrichtung zu rechnen, was wiederum zur Schrittweitenverkürzung führt. Daher kann davon ausgegangen werden, daß die Polygonpunkte des Algorithmus mit der geringeren durchschnittlichen Schrittweitenverkürzung näher an der tatsächlichen Gefällelinie liegen. Es soll noch einmal betont werden, daß hier nicht von der Veränderung der Schrittweite durch die Punktverschiebungen während der Modifikation die Rede ist, sondern die für beide Verfahren identische vorherige Verkürzung.

Die verkürzten Schrittweiten für die Gefällelinien des Testdatensatzes 2 mit Schrittweite eins sind in Tabelle 1 zu finden. Schon die durch-

Gefällelinie	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Modifikation A	0,71	0,54	0,74	0,60	0,17	0,44	0,48	0,36	0,48
Modifikation B	0,77	0,90	0,76	0,97	0,31	0,74	0,55	0,72	0,75
A / B in %	92	60	97	62	55	59	87	50	64

Tab. 1: Durchschnittliche Schrittweite der Gefällelinien eins bis acht für Modifikation A und B vor der eigentlichen Modifikation. Die dritte Zeile gibt die Schrittweite von Modifikation A bezogen auf B in Prozent an.

schnittlichen Werte zeigen eine um etwa 25 % stärkere Verkürzung bei Modifikation A gegenüber Modifikation B. Auch für die einzelnen Gefällelinien ergibt sich mit dem ersten Algorithmus generell eine kleinere mittlere Schrittweite. Nur an den Gefällelinien 1 und 3 fallen die Unterschiede recht klein aus. Das ist auf die starke Neigung dieser Gefällelinien im Vergleich zu den Talhängen zurückzuführen. Die Neigungsrichtungen variieren im näheren Umfeld der Gefällelinie deshalb nur geringfügig, insbesondere weniger als 90°. Eine Verkürzung der Schrittweite würde daher nur bei deutlichen Abweichungen von der Gefällelinie ausgelöst werden, die bei beiden Algorithmen nicht auftreten. Aufgrund der eindeutigen Ergebnisse an den anderen Gefällelinien kann dennoch darauf geschlossen werden, daß Modifikation B die tatsächlichen Gefällelinien besser approximiert als Modifikation A.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß sich die verbesserten Gefällelinienalgorithmen

auch an realen Höhenmodellen bewährt haben. Modifikation-B erzielt bei kürzerer Programmaufzeit die besseren Ergebnisse und ist deshalb der Modifikation A vorzuziehen. Wenn die Einhaltung der Sollschrittweite für den Anwender von Bedeutung ist, sollte deren Verkürzung durch die Modifikationen bei der Vorgabe der Schrittweite berücksichtigt werden.

6. Diskussion der Ergebnisse

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur Ableitung von Höhen- und Gefällelinien aus wavelettransformierten Höhenmodellen vorgestellt. Dabei wurde die Eigenschaft von Waveletkoeffizienten ausgenutzt, unter bestimmten Voraussetzungen die erste Ableitung von Funktionen zu approximieren. Mit den partiellen ersten Ableitungen der Geländeoberfläche liegt indirekt auch die Neigungsrichtung auf einem diskreten Vektorfeld vor. Auf Basis dieser Neigungsrichtungen konnten einfache Verfolgungsalgorithmen für Höhen- und Gefällelinien entwickelt werden.

Die damit erzeugten Höhenlinienpolygone driften, mit zunehmenden Abstand vom Startpunkt,

von den tatsächlichen Höhenlinien ab. Um dies zu vermeiden, wurde dieser Standardalgorithmus zweimal verbessert. In diese Modifikationen flossen vor allem geometrische Überlegungen ein. Desweiteren berücksichtigen die modifizierten Algorithmen eine größere Anzahl von Waveletkoeffizienten in der Umgebung des aktuellen Polygonpunktes. Tests an regelmäßigen geometrischen Objekten mit bekannten Höhenlinien zeigten, daß die entwickelten Verfahren funktionieren und in den Programmen korrekt umgesetzt wurden.

Die mit dem einfachen Verfolgungsalgorithmus erzeugten Gefällelinien driften zwar nicht von den tatsächlichen Gefällelinien ab, pendeln aber im „Zickzack“ um diese herum. Deshalb wurden auch hier zwei Verbesserungen am Standardalgorithmus vorgenommen, die das unterbinden sollen. Die Überlegungen, die diesen Modifikationen zugrunde lagen, waren wiederum geometrischer Natur. Auch die Gefällelinienalgorithmen

wurden an Modellen mit bekannten Gefällelinien erprobt. Die Testergebnisse zeigten, daß die Modifikationen den Verlauf der Gefällelinienpolygone in gewünschter Weise verbessern.

Entgegen den Erwartungen brachte die zweite Modifikation keine weitere meßbare Verbesserung der erzeugten Höhenlinien. Es ist deshalb sinnvoll, nur die mit kürzeren Rechenzeiten verbundene Modifikation I einzusetzen.

Zur Verifizierung der Gefällelinienpolygone standen keine unabhängig erzeugten Referenzgefällelinien zur Verfügung. Es konnte jedoch auf indirekte Weise nachgewiesen werden, daß die Polygonpunkte der zweiten Modifikation (bezeichnet mit Modifikation B) näher an den tatsächlichen Gefällelinien liegen, als die der Modifikation A. Da diese besseren Ergebnisse mit kürzeren Programmlaufzeiten erreicht werden, ist Modifikation B in jedem Falle den anderen Gefällelinienalgorithmen vorzuziehen.

Die Festlegung von Startpunkten für den Höhenlinienalgorithmus erfolgte in dieser Arbeit nur unter Berücksichtigung der Schichthöhe. Angestellte Überlegungen legen jedoch nahe, daß die Einbeziehung weiterer Faktoren die Ergebnisse verbessern könnte. In fortsetzenden Untersuchungen sollte daher versucht werden, Regeln für ein geschicktes Auswählen der Startpunkte aufzustellen. Das schließt auch die Frage ein, wann und wo mehrere Startpunkte pro Höhenlinie festgesetzt werden sollten. Die Option mehrerer Startpunkte müßte dann auch in die Programme implementiert werden.

In die entwickelten Algorithmen fließen bisher nur die Waveletkoeffizienten der untersten Skale ein. Liegen die Koeffizienten der stationären Wavelettransformation vor, ist das ausreichend. Die

Vorteile der Wavelettransformation, wie hohe Datenkompressionsraten und effektive Transformationsalgorithmen kommen aber erst beim Einsatz der schnellen Wavelettransformation zur Geltung. Deren Koeffizienten sind bereits auf der untersten Skale stark ausgedünnt (vgl. Abschnitt 2, Abb. 1). Es wäre interessant zu untersuchen, wie sich das Fehlen dieser Koeffizienten auf die Ergebnisse der Algorithmen auswirkt. Falls erforderlich, könnte versucht werden, diese Datenlücken durch Einbeziehung von Waveletkoeffizienten höherer Skalen oder Interpolationsverfahren zu überbrücken.

Literatur

- [1] *Bethge, F.*: Genauigkeit geometrischer Größen aus Vektordaten, Deutsche Geod. Komm., Reihe C, Nr.473, 1994.
- [2] *Beyer, G.*: Terrain Inclination and Curvature from Wavelet Coefficients. Approximation Formulae for the Relief, Journal of Geodesy (in print).
- [3] *Beyer, G.*: Wavelettransformation hybrider Geländemodelle, Habilitationsschrift. Technische Universität Dresden, eingereicht.
- [4] *Blatter, Chr.*: Wavelets – Eine Einführung, Vieweg, 1998.
- [5] *Beyer, G., Meier, S.*: Geländeneigung und -wölbung aus Waveletkoeffizienten. Approximationsformeln für Profile, Zeitschrift für Vermessungswesen, 2001.
- [6] *Louis, A. K., Maas, P., Rieder, A.*: Wavelets, B.G.Teubner, 1994.
- [7] *Richter, M.*: Konstruktion von Gefälle- und Höhenlinien des Reliefs aus Waveletkoeffizienten, Diplomarbeit. Institut für Planetare Geodäsie, TU Dresden, 2001.
- [8] *Wickerhauser, M. V.*: Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software, A. K. Peters, Ltd. Wellesley, 1994.

Anschrift der Autoren:

Dr. rer. nat. Gert Beyer: Technische Universität Dresden, Institut für Geometrie, D-01062 Dresden, e-mail: beyer@math.tu-dresden.de.
Dipl.-Ing. Michael Richter: Industriestraße 6, D-40227 Düsseldorf, e-mail: lichtel@gmx.de