



Ein internationales photogrammetrisches Projekt mit höchsten Anforderungen – Erstellung der Planungsgrundlagen für den Brenner Basistunnel

Klaus Wenger-Oehn ¹, Roland Würländer ²

¹ *Ziviltechnikerbüro Wenger-Oehn, Franz-Josef-Str.33, A-5020 Salzburg*

² *Ziviltechnikerbüro Wenger-Oehn, Franz-Josef-Str.33, A-5020 Salzburg*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **91** (2), S. 122–129

2003

Bib_TE_X:

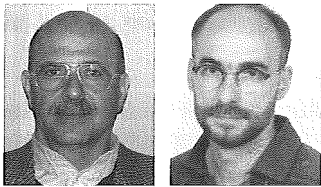
```
@ARTICLE{Wenger-Oehn_VGI_200317,
  Title = {Ein internationales photogrammetrisches Projekt mit h{"o}chsten
    Anforderungen -- Erstellung der Planungsgrundlagen f{"u}r den Brenner
    Basistunnel},
  Author = {Wenger-Oehn, Klaus and W{"u}rl{"a}nder, Roland},
  Journal = {VGI -- {"O}sterreichische Zeitschrift f{"u}r Vermessung und
    Geoinformation},
  Pages = {122--129},
  Number = {2},
  Year = {2003},
  Volume = {91}
}
```



- [11] *Gielsdorf F, Gründig L*: Nachbarschaftstreue Anpassung auf Basis des Membranmodells, ZfV 122: 208–218, 1997.
- [12] *Kraus K*: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie, Bildmessung und Luftbildwesen 40: 7–12, 1972.
- [13] *Moritz H*: Neuere Ausgleichs- und Prädiktionsverfahren, ZfV 98: 137–146
- [14] *Kraus K*: Photogrammetrie, Band 3, Dümmler Verlag, Köln, 2002.
- [15] *Göpfert W*: Interpolationsergebnisse mit der multiquadratischen Methode, ZfV 102: 457–460, 1977.

Anschrift der Autoren

Institut für Ingenieurgeodäsie und Messsysteme, Technische Universität Graz, Steyrergasse 30, A-8010 Graz, Tel.: +43 316 873 6321, Fax: +43 316 873 6820, E-Mail: {andreas.wieser, werner.lienhart, fritz.brunner}@tugraz.at



Ein internationales photogrammetrisches Projekt mit höchsten Anforderungen – Erstellung der Planungsgrundlagen für den Brenner Basistunnel

Klaus Wenger-Oehn und Roland Würfländer, Salzburg

Zusammenfassung:

Mit dem für den Brenner Basistunnel vergebenen Auftrag zur Erstellung von vermessungstechnischen Planungsgrundlagen (digitales Höhenmodell, digitale Orthofotos, Vektordaten und -pläne) wurde ein in Österreich herausragendes Projekt in den Arbeitsfeldern Photogrammetrie und Geoinformation durchgeführt. Die Anforderungen des Projektes und deren technische Lösung werden anhand von Arbeitsabläufen und Produktbeispielen vorgestellt.

Abstract:

The order to produce fundamental geodetic products like digital height model, digital ortho-images, vector data and maps used for planning the Brenner base tunnel was an outstanding Austrian project in the fields of photogrammetry and GIS. The demands of this project and their technical solution will be presented with exemplary working processes and products.

1. Einführung

Die „Europäische Wirtschaftliche Interessensvereinigung Brenner Basistunnel“ (BBT-EWIV) als Planungsgesellschaft für den Brenner Basistunnel hat zum Jahresende 2000 einen Auftrag zur Erstellung von Planungsgrundlagen (digitales Höhenmodell, digitale Orthofotos, Vektordaten und -pläne) vergeben. Neben weiteren Projekten im Bereich der Geodäsie (z.B. Geodätisches Rahmennetz, Präzisionsnivellement, Luftbildaufnahme, Projektgeoid) diente überwiegend dieses Projekt der Bereitstellung von digitalen Grundlagen für die nachfolgende Projektierung mit moderner Software [1].

auftragt. Das erstgenannte österreichische Ziviltechnikerbüro war als federführendes Unternehmen für die Projektleitung sowohl im Innenverhältnis als auch in allen vertragsrelevanten und technischen Abstimmungsfragen mit dem Auftraggeber und den Projektpartnern verantwortlich.

Im weiteren wird ein Überblick über die in den Jahren 2001 und 2002 durchgeführte Bearbeitung und die umfangreichen Produkte des Projekts gegeben und anhand von Beispielen aufgezeigt, wie die damit verbundenen logistischen und technischen Herausforderungen durch den Auftragnehmer gelöst wurden.

Im Rahmen einer europaweiten Ausschreibung wurde als Bestbieter (Bewertung von Angebotspreis, Ausstattung, Qualifikation und Referenzen) die vom österreichischen Ingenieurkonsulenten K. Wenger-Oehn mit der deutschen Firma Hansa Luftbild Consulting International GmbH gebildete ARGE mit der Bearbeitung dieses Projektes be-

2. Vorleistungen des Auftraggebers

Im Rahmen weiterer Aufträge oder Kooperationsverträge wurden von der BBT-EWIV vorbereitende Arbeiten in die Wege geleitet oder bestehende Daten bereitgestellt. Für dieses Projekt sind insbesondere zu nennen:

- Erstellung eines geodätischen Rahmennetzes und Definition eines Bezugs- und Koordinatensystems für das Projekt (WGS84, UTM, ITRF94)
- „Bildflug BBT-EWIV“: Luftbildaufnahme des Projektgebietes (mit Ausnahme des Inntals) auf Farbnegativfilm mit Verwendung von dGPS zur Bestimmung der Projektionszentren zwischen 8. und 10. September 2000; insgesamt 1328 Bilder in 30 Längs- und 4 Querstreifen mit einem mittleren Bildmaßstab von ca. 1:17.000
- Signalisierung von 75 Passpunktgruppen für die Aerotriangulation dieses Bildfluges und Koordinatenbestimmung im Projektssystem
- Bereitstellung der bestehenden Orthofotos und digitalen Vektordaten der Grundkarten 1:5.000 im Bereich Inntal von der Tiroler Landesregierung
- Bereitstellung eines Geländehöhenmodells für den österreichischen Anteil des Projektgebietes durch das BEV
- Bereitstellung von verschiedenen GIS-Datensätzen (z.B. Verwaltungsgrenzen, Forststrassen, Gewässernetz, Kartenbeschriftungen der topographischen Karten) aus verschiedenen Quellen in Nord- und Südtirol, vom BEV und dem I.G.M (Italienisches Militärgeografisches Institut) zu Kontroll- und Ergänzungszwecken
- Erhebungen vor Ort zur Überprüfung der Namensgebung in den Karten und für die Zuordnung der Adressdaten aus bestehenden Datenbanken zu den Gebäuden in den Vektordaten

Die Qualität und Eignung der bereitgestellten Unterlagen für das Projekt war jeweils zu prüfen. Insbesondere bei den GIS-Daten gab es häufig geometrische Ungenauigkeiten und Spannungen zwischen verschiedenen Quellen.

3. Anforderungen des Projektes

Die besonderen Anforderungen dieses Projektes sind aus der Summe der einzelnen Leistungsanforderungen ablesbar. Dies betrifft insbesondere den Leistungsumfang, den zeitlichen Rahmen, die Koordinatensysteme und die Zweisprachigkeit.

3.1. Leistungsumfang

Die wichtigsten Leistungsanforderungen mit ihren technischen Spezifikationen lassen sich stichpunktartig folgendermaßen darstellen:

- Aerotriangulation für den Bildflug BBT-EWIV mit Messung von mindestens 12 Verknüpfungspunkten je Modell an analytischen photogrammetrischen Stereoauswertegeräten und Berechnung des gesamten Bildfluges

- Messung von Geländehöhendaten (Rasterpunkte 25 m/50 m, Kanten, Formlinien, Spothights) an analytischen photogrammetrischen Stereoauswertegeräten für den Bereich Südtirol (ca. 1.290 km²) mit Berücksichtigung einer minimalen Dichte der Linieninformation von 12 km Linienlänge je km²
- Erstellung eines homogenen Höhenmodells mit Rasterweite 10 m für das gesamte Projektgebiet von etwas mehr als 2.500 km² zusätzlich der Berechnung von Höhenlinien in einer Äquidistanz von 5 m (Talbereiche) oder 10 m
- Erstellung eines digitalen Farborthofotomosaiks für das gesamte Projektgebiet von etwas mehr als 2.500 km² (siehe Abbildung 1) mit einer Bodenauflösung von 25cm in den drei Formaten TIFF, JPEG und MrSID sowie in den drei Koordinatensystemen des Projektes
- Erstellung von Orthofotokarten in den Maßstäben 1:2.000 bis 1:100.000 auf Normalpapier und Fotopapier für die drei verschiedenen Blattsnitte der Projektkoordinatensysteme (insgesamt 1.297 Karten)
- Durchführung einer gis-tauglichen 3D-Vektordatenauswertung für den Kernbereich des Projektes (ca. 660km²) an analytischen photogrammetrischen Stereoauswertegeräten mit dem Zielmaßstab 1:5.000 anhand eines umfangreichen Objektkataloges (ca. 250 Objekte, abgeleitet aus den Layerlisten zur Grundkarte 1:5.000) mit der Erstellung einer Flächentopologie für die Datenebenen Gebäude, Verkehrswege und Gewässer
- Übernahme, Transformation und gis-taugliche Überarbeitung der Vektordaten aus dem Bereich Inntal (ca. 100 km²)
- Einarbeitung von Kartentexten aus verschiedenen Quellen sowie Übernahme der vor Ort erhobenen Adressdaten zu allen Gebäuden in den digitalen GIS-Datensatz
- Erstellung von Lage-Höhenplänen in den Maßstäben 1:2.000 bis 1:25.000 auf Papier und Folie für die drei verschiedenen Blattsnitte der Projektkoordinatensysteme (insgesamt 352 Karten)
- Erstellung von Übersichtsplänen zum Projekt in den Maßstäben 1:50.000 bis 1:200.000
- Erstellung von Karten mit Ortho-Vektor-Überlagerungen (Höhenlinien, Ortsnamen) in den Maßstäben 1:2.000 bis 1:25.000 auf Normalpapier und Fotopapier für die drei verschiedene

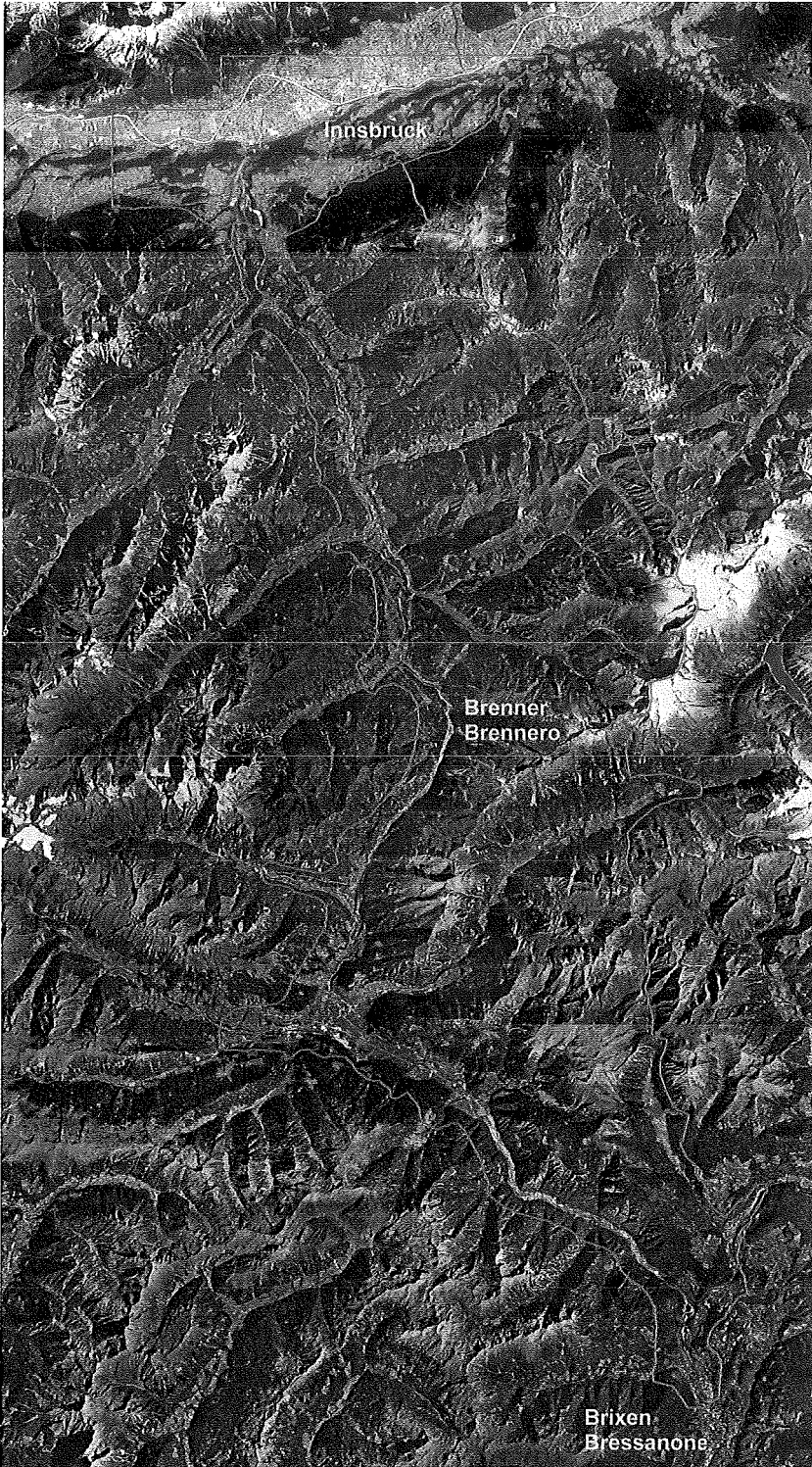


Abbildung 1: Orthofotomosaik des Projektgebietes mit dem Auswerte- und Datenübernahmebereich für die Lage-Höhenpläne (rote Linie)

nen Blattschnitte der Projektkoordinatensysteme (insgesamt 1.287 Karten)

- Lieferung sämtlicher digitaler Daten in fünffacher Ausfertigung (3-fach auf DVD-R, 2-fach auf DAT-Tape)

3.2. Zeitlicher Rahmen

In Anbetracht des Leistungsumfanges waren die hierfür vom Auftraggeber vorgegebenen und mit Vertragsstrafe belegten Zeiträume sehr kurz. So war die Lieferung des Geländehöhenmodells innerhalb von 3 Monaten, die Lieferung der Orthofotos innerhalb von 5 Monaten und die als Zusatzauftrag vorgesehene Vektordatenauswertung innerhalb von 3 Monaten ab deren separater Beauftragung vorgesehen. In Anbetracht der üblichen Größe von photogrammetrischen Büros in Österreich war diese Vorgabe nur im Rahmen einer ARGE zu erfüllen.

3.3. Koordinatensysteme

Die bestehenden raumbezogenen Daten des Gebietes lagen bei Beginn dieses Projektes in den Koordinatensystemen der beteiligten Länder vor. Für italienisches Gebiet im System Gauss-Boaga, für österreichisches Gebiet im System Gauss-Krüger M28. Als einheitliches Projektkoordinatensystem wurde das den internationalen Anforderungen (EU, NATO) entsprechende Bezugssystem WGS84 mit Projektionssystem UTM gewählt, das auch in Österreich zunehmende Bedeutung erlangen wird (siehe auch [2]).

Die technische Lösung zur Transformation von Vektor- und Rasterdaten mit den für das Projekt maßgeblichen CAD- und GIS-Softwarepaketen (AutoCAD Map, ARC/INFO, ArcView) war zu erarbeiten und dem Auftraggeber zu dokumentieren (siehe hierzu auch Kap. 4.2). Sämtliche zugefertigte Daten mussten in das Projektkoordinatensystem transformiert, die Produkte des Projektes sowohl digital als auch analog (Karten) in allen drei Koordinatensystemen geliefert werden.

3.4. Zweisprachigkeit

Die BBT-EWIV hat als europäische Interessensvereinigung mit österreichischen und italienischen Gesellschaftern für alle vertragsrelevanten Unterlagen die Zweisprachigkeit vorgegeben. So waren neben dem Schriftverkehr auch die Zwischenberichte und der umfangreiche Abschlußbericht in den Sprachen deutsch und italienisch vorzulegen. Ebenso waren die Pläne in der Legende zweisprachig zu halten und für den

italienischen Anteil des Projektgebietes auch die Kartenbeschriftungen zweisprachig auszuführen.

4. Herausforderungen im Arbeitsablauf

Mit dem soeben skizzierten Leistungsumfang und dem dafür zur Verfügung stehenden zeitlichen Rahmen wird verständlich, dass in diesem Projekt besondere Ansprüche an die Logistik und auch die Arbeitsbelastung der Mitarbeiter gestellt waren. Zusätzlich war es das Bestreben des Auftragnehmers, die Produkte in einer möglichst hohen Qualität zu erstellen. Die damit verbundenen Herausforderungen werden nachstehend mit ausgewählten Einzelfällen skizziert.

4.1. Logistische Herausforderungen

Der technische und personelle Engpass lag bei diesem Projekt eindeutig im Bereich der analytischen Auswertesysteme und der daran besonders geschulten photogrammetrischen Operateure. An dieser Ausstattung war die Aero triangulationsmessung, die Geländehöhenerfassung und die 3D-Vektordatenauswertung durchzuführen. Sowohl die extrem teuren Präzisionsgeräte als auch die speziell geschulten Operateure lassen sich nicht kurzfristig aufstocken. Es war deshalb ein möglichst frühzeitiger Beginn der Luftbildauswertung im Projektablauf anzustreben. Innerhalb der ARGE wurde eine parallele Bearbeitung an bis zu sechs Auswertestationen im Schichtbetrieb vorgesehen, d.h. das Luftbildmaterial war den einzelnen Stationen blockweise (nach Flugstreifen) zuzuordnen.

Andererseits mussten die Luftbilder für die Orthofotoerstellung gescannt werden. Eine möglichst optimale Qualität der Orthofotos erfordert jedoch die Scannerung der Bilder vor deren Verwendung im Arbeitsprozess, da leichte Verschmutzungen oder Beschädigungen (Kratzer) nicht ausgeschlossen werden können.

Um diesen beiden Anforderungen gerecht zu werden, wurde für die Scannerung eine Strategie vorgegeben, die einen möglichst frühzeitigen Arbeitsbeginn für die Aero triangulation an allen Arbeitsstationen ermöglichte. Ein Beispiel für eine solche Strategie wird in der Abbildung 2 aufgezeigt. Sinnvollerweise wird mit der Verknüpfungspunktauswahl für die AT erst begonnen, wenn mindestens zwei Bildstreifen vorliegen, um die Verknüpfungspunkte zwischen den Bildstreifen optimal auswählen zu können.

Weitere Herausforderungen an den Projektablauf wurden z.B. durch die Datenmengen im Pro-

zess der Orthofotoerstellung gestellt. Die gescannten Originalbilder ergaben eine Datenmenge von ca. 1 Terabyte, die Orthofotos eine Datenmenge von ca. 250 GigaByte und das Orthofotomosaik in einem der drei Koordinatensysteme immer noch 122 Gigabyte. Die Einzelblätter des Orthofotomosaiks mussten in die beiden Länderkoordinatensysteme transformiert, alle Blätter in die Formate JPEG und MrSID gewandelt werden und abschließend noch fünffach auf verschiedenen Datenträgern (DVD-R und DAT) geliefert werden. Diese Zahlen müssen selbstverständlich vor dem Hintergrund des Bearbeitungszeitraumes 1. Halbjahr 2001 bewertet werden.

Dies erforderte eine genaue Planung einer Bearbeitungs pipeline unter Berücksichtigung von Recherauslastungen und Backup-Strategien, die Erstellung von zeitlich gesteuerten Hintergrundprozessen für die Ausnutzung der Nachtstunden und eine Abstimmung dieser Bearbeitungs pipeline auch zwischen den ARGE-Partnern.

Diese Aussagen lassen sich gleichermaßen auf den Prozess der Herstellung der insgesamt über 3.000 analogen Karten und Pläne übertragen.

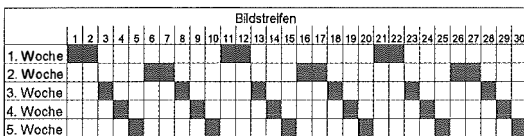


Abbildung 2: Strategie für die Scannerung bei nachfolgender analytischer AT an sechs Auswertestationen

4.2. Technische Herausforderungen

Als Beispiel für besondere technische Herausforderungen sei die Transformation der Vektor- und Rasterdaten zwischen den betroffenen Koordinatensystemen genannt. Hierzu wurden vom Projektpartner ARGE Obex-Pfeifer-Tiwag aus den Daten des geodätischen Rahmennetzes für das Projekt Brenner Basistunnel gültige Datumparameter zur Transformation zwischen den unterschiedlichen Bezugssystemen bereitgestellt [3].

Die Umsetzung dieser Datumparameter in technische Anweisungen zur Transformation von Vektor- und Rasterdaten innerhalb der GIS-Systeme AutoCAD Map und ARC/INFO war Teil der Projektleitungsaufgaben und wurde im Büro des Ziviltechnikers Wenger-Oehn gelöst. Angestrebt wurde eine genaue Transformation im Bereich von wenigen Zentimetern. Dabei wurden

folgende Unzulänglichkeiten innerhalb von AutoCAD Map aufgedeckt (jeweils technischer Stand zum Zeitpunkt der Projektbearbeitung):

- die in AutoCAD Map4 vordefinierten Datumparameter für das österreichische Bezugssystem zu WGS84 sind nicht nur ungenau, sondern wegen falscher Vorzeichen grob falsch (Abweichung über 200 m)
- eine exakte Transformation von Rasterdateien (Orthofotos) im Sinne einer Berechnung für jedes Pixel ist in AutoCAD Map4 oder Cad Overlay 2000i nicht möglich

Während die erste Unzulänglichkeit durch die Definition einer neuen Transformation innerhalb von AutoCAD Map unter Verwendung der Datumparameter des Projektes leicht lösbar war, konnte die Transformation der Orthobilder nur mit ARC/INFO zufriedenstellend durchgeführt werden, allerdings mit den dort implementierten exakten Berechnungsmethode eigenen hohen Rechenzeiten.

5. Produktbeispiele

Die im Laufe der Bearbeitung des Projektes entstandenen Produkte gemäß dem in Kap. 3 aufgelisteten Leistungskatalog werden anhand einiger Abbildungen verdeutlicht.

Das Geländehöhenmodell mit Rasterweite 10 m ist in einem Ausschnitt in Form eines geschummerten Geländereiefs in Abbildung 3 wiedergegeben. Dieser Ausschnitt zeigt ca. 200 km² des von der ARGE neu erstellten Geländehöhenmodells in Südtirol. Es weist einen aus empirischen Untersuchungen und theoretischen Überlegungen gleichermaßen abgeleiteten mittleren Höhenfehler von ca. 1m auf. Zur Genauigkeit in Nordtirol siehe Angaben des BEV [4].

Das Farborthofotomosaik für das gesamte Projektgebiet (2.531 km²) ist in der Abbildung 1 wiedergegeben. Es liegt einheitlich mit einer Bodenauflösung von 25 cm vor. Einen Eindruck über den Detailreichtum dieser Auflösung gibt die Abbildung 4, die einen Ausschnitt aus diesem Orthofotomosaik im Bereich Brennerpass mit der Auflösung von 25 cm und dem Zielmaßstab 1:5.000 zeigt.

Einen Ausschnitt aus dem sogenannten Lage-Höhenplan 1:5.000 zeigt die Abbildung 5. Diese Pläne wurden aus den photogrammetrisch erfassten und durch Zusatzinformationen ergänzten Vektordaten sowie den aus dem Geländemodell berechneten und kartographisch überarbeiteten Höhenlinien erstellt. Die Bereiche, in denen



Abbildung 3: Ausschnitt aus dem neu erstellten Geländemodell für den Bereich Südtirol als geschummertes Relief (ca. 15% des gesamten neu erstellten Geländemodells)

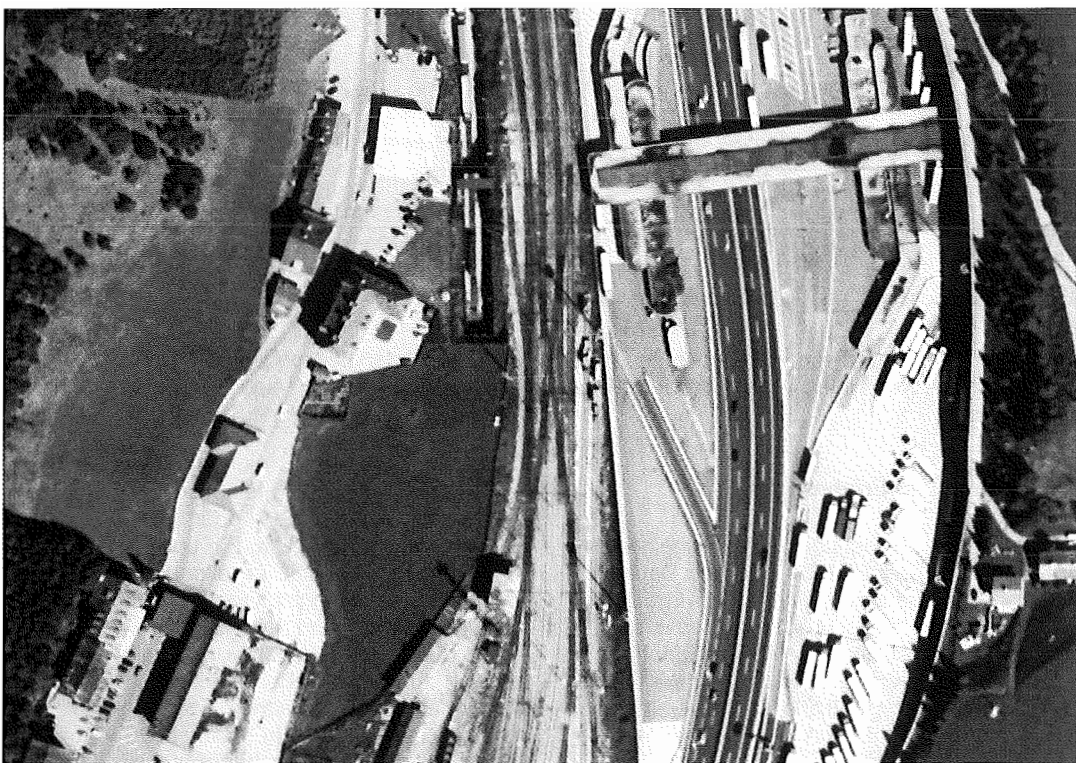


Abbildung 4: Ausschnitt „Brennerpass“ aus dem Orthofotomosaik mit Bodenauflösung 25cm

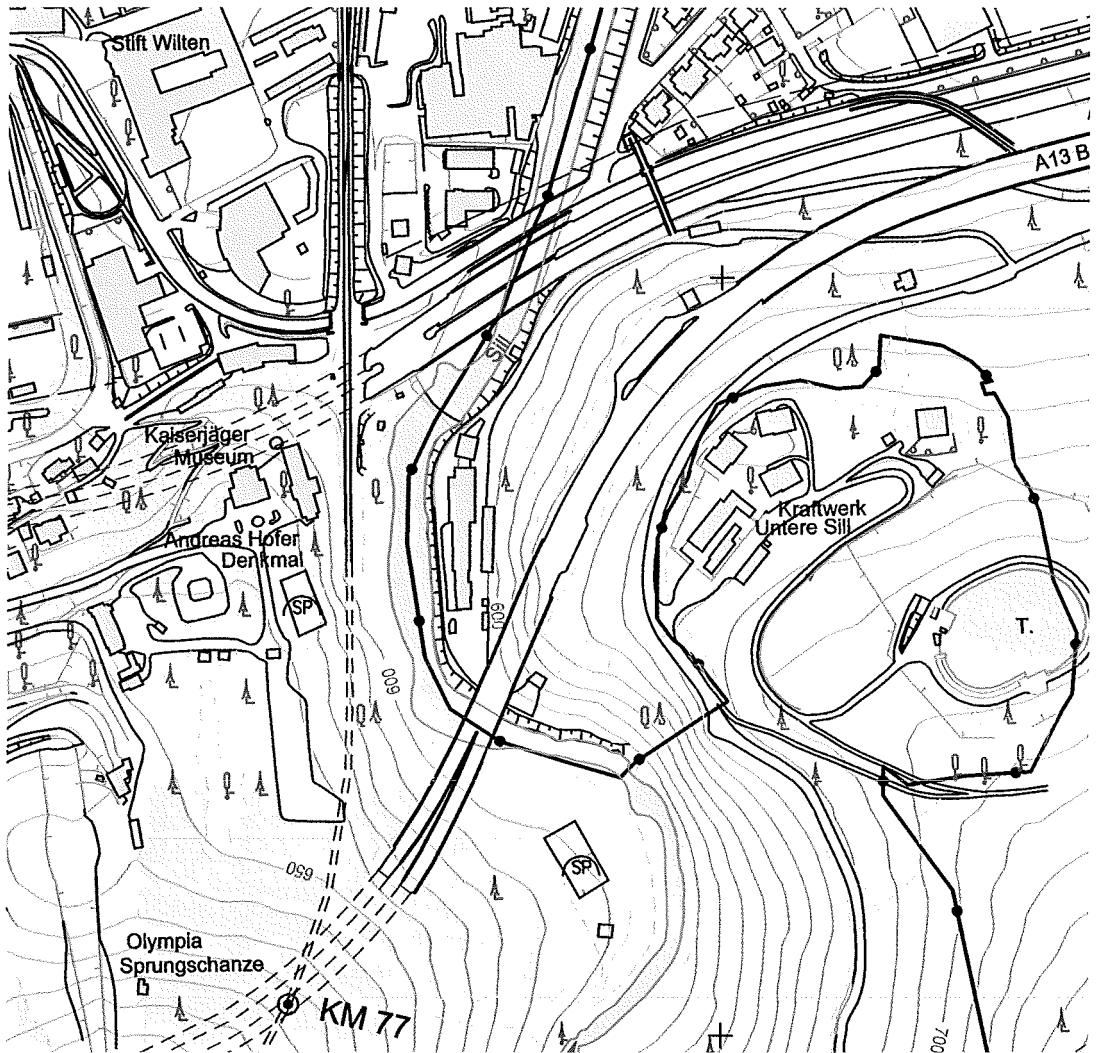


Abbildung 5: Ausschnitt aus einem Lage-Höhenplan 1:5.000 im Originalmaßstab

die Vektordaten und diese Pläne vorliegen, werden durch die roten Linien in der Abbildung 1 gekennzeichnet.

6. Probleme und Erfahrungen

Das Projekt wurde von einer Reihe weiterer Auftragnehmer der BBT-EWIV durch Datenlieferungen oder Zuarbeiten unterstützt (siehe Kap. 2). Die Qualität dieser Leistungen war zumeist sehr ordentlich. In einzelnen Fällen jedoch mussten durch Lieferverzug oder die geringe Qualität der Arbeiten auch deutliche Terminverschiebungen oder Mehrarbeiten in Kauf genommen werden. Dies lässt sich im Vorfeld kaum absehen oder steuern. Umso wichtiger ist es, bereits in

der Phase der Leistungserbringung vor der eigentlichen Lieferung einen intensiven Kontakt mit den Projektpartnern aufzubauen.

Die Kontrolle von Subunternehmerleistungen ist im technischen Umfeld in der Regel über technische Kenngrößen oder die Ergebnisse selbst relativ gut möglich. Für Leistungen außerhalb des technischen Arbeitsablaufes ist dies wesentlich schwieriger. Dies trifft insbesondere auf den in diesem Projekt nicht unwesentlichen Anteil der Übersetzungen von deutsch nach italienisch zu. Es ist dabei unerlässlich, die Übersetzungen der technischen Fachbegriffe selbst zu erarbeiten und sich frühzeitig beim Auftraggeber über die Zufriedenheit mit den Übersetzungsleistungen ins Bild setzen zu lassen.

Literatur

- [1] BBT-EWIV: Kurzbericht 2002, Band 3: Vermessung. Quelle: www.bbt-ewiv.com
- [2] Bernhard Jüptner: Geobasisdaten in Österreich. Vermessung und Geoinformation, Heft 2, 2000, S. 117–121.
- [3] ARGE Obex-Pfeifer-Tiwag / BBT-EWIV: Geodätische Grundlagenvermessung. Abschlussbericht zum Auftrag D0021 der BBT EWIV, unveröffentlicht.

[4] BEV-Produktinformationen: Digitales Geländehöhenmodell. Quelle: www.bev.at/prodinfo/dgm/dgm_3f_main.htm

Anschrift der Autoren

Baurat h.c. Dipl.-Ing. Klaus Wenger-Oehn, Dipl.-Ing. Roland Würfländer, Ziviltechnikerbüro Wenger-Oehn, Franz-Josef-Str.33, A-5020 Salzburg. Email: office@wenger-oehn.at



Zur numerischen Berechnung von Schnittkurven zwischen Zylinder und Kugel

Helmut Späth, Oldenburg

Zusammenfassung

Gegeben sei ein beliebig im Raum gedrehter Zylinder und eine Kugel. Wir entwickeln ein numerisches Verfahren, mit dem entschieden werden kann, ob die beiden Körperoberflächen eine gemeinsame Schnittkurve haben oder nicht und bestimmen diese gegebenenfalls durch Berechnung beliebig dichter Punkten auf ihr.

1. Problemstellung

Es seien $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$. Ist \mathbf{p} der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius R , so lautet deren Gleichung

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^2 = R^2 \tag{1}$$

Ist \mathbf{a} mit $\|\mathbf{a}\| = 1$ ($\|\cdot\|$ bezeichnet die Euklidische Norm) die Achsenrichtung eines Zylinders mit Radius r und einem Achsenpunkt \mathbf{q} , so lautet dessen Gleichung [1]:

$$\|(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \times \mathbf{a}\|^2 = r^2 \tag{2}$$

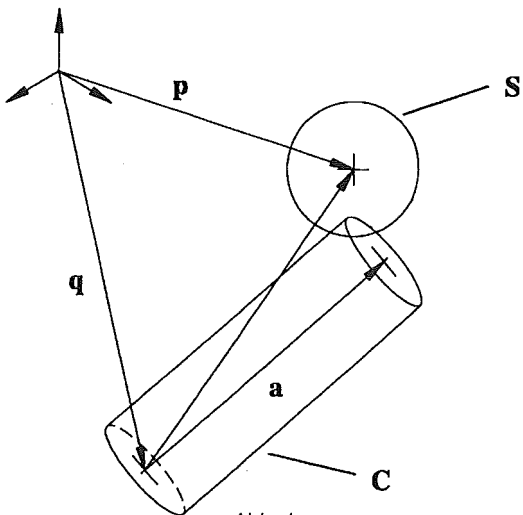


Abb. 1

Hierbei bedeutet das \times Vektorprodukt. Für diese Darstellung (siehe Fig. 1, wo S die Kugel und C den Zylinder bedeutet) kann man zwar entscheiden [2], ob sich die beiden Körperoberflächen schneiden oder nicht, aber man kann die gegebenenfalls vorhandene Schnittkurve nicht berechnen. Es wird sich herausstellen, dass eine Berechnung der Schnittkurve und damit auch eine Entscheidung über ihre Existenz relativ einfach möglich wird, indem man zu einer parametrischen Darstellung eines Zylinders übergeht [3]. Ein Zylinder mit der z-Achse $\mathbf{a} = (0,0,1)$ als Achsenrichtung und $\mathbf{q} = (a, b, 0)$ lautet in Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= a + r \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ y &= b + r \sin t, \\ z &= u, & -\infty < u < \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

Setzt man in (2) ein, so erhält man die Kreisgleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

zurück und z ist beliebig). Aus (3) erhält man einen beliebigen Zylinder im Raum, indem man noch in der y-z-Ebene um den Winkel γ und in der x-z-Ebene um den Winkel β dreht, d. h. festlegt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + r \cos t \\ b + r \sin t \\ u \end{pmatrix}$$

Wir setzen also im folgenden a, b, r, β, γ als bekannt voraus; man kann diese Werte bei Vorliegen der Darstellung (2) daraus berechnen. Ausmultipliziert lautet (4)