Zur numerischen Berechnung von Lotfußpunkten auf ebenen und räumlichen Kegelschnitten in impliziter Form

Helmuth Späth [1]

[1] *Fakultät V, Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg*

VGI – Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation **92** (2), S. 77–78

2004

Zur numerischen Berechnung von Lotfußpunkten auf ebenen und räumlichen Kegelschnitten in impliziter Form

Helmuth Späth, Oldenburg

Zusammenfassung

Zur Bestimmung von Lotfußpunkten auf ebenen und räumlichen Kegelschnitten, die nicht in typabhängiger parametrischer Form sondern in impliziter Form vorliegen, wird das klassische NEWTON-Verfahren mit einigen wichtigen heuristischen Ergänzungen eingesetzt. Numerische Beispiele werden angegeben.

1 Problemstellung und Lösungsansatz

Gegeben sei und Punkt

$$P=(p,q) \quad \text{bzw.} \quad P=(r,s,t) \tag{1}$$

in der Ebene oder im Raum und ein ebener Kegelschnitt

$$a_1x^2+a_2y^2+a_3xy+a_4x+a_5y+a_6=0 \tag{2}$$

oder ein räumlicher Kegelschnitt

$$\begin{aligned} &b_1x^2+b_2y^2+b_3z^2+b_4xy+b_5xz+b_6yz \\ &\quad +b_7x+b_8y+b_9z+b_{10}=0 \end{aligned} \tag{3}$$

Gesucht sind die Fußpunkte $L=(x,y)$ bzw. $L=(x,y,z)$ der Lote, die von P aus auf den Kegelschnitt gefüllt werden können. Speziell interessiert derjenige Lotfußpunkt, zu dem das kürzeste Lot gehört. Somit sind die absoluten Minima der Funktion

$$F(x,y)=(x-p)^2+(y-q)^2 \tag{4}$$

bzw.

$$G(x,y,z)=(x-r)^2+(y-s)^2+(z-t)^2 \tag{5}$$

zu bestimmen unter der Nebenbedingung (2) bzw. (3).

Die LAGRANGE-Funktion für (4) und (2) lautet

$$\begin{aligned} N(x,y,\lambda)=&\tfrac{1}{2}\left[(x-p)^2+(y-q)^2\right] \\ &-\lambda(a_1x^2+a_2y^2+a_3xy+a_4x+a_5y+a_6) \end{aligned} \tag{6}$$

Die notwendige Bedingung $\frac{\partial N}{\partial \lambda}=0$ ergibt (2) und die notwendigen Bedingungen $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial y}=0$ ergeben

$$\begin{aligned} (x-p)-\lambda(2a_1x+a_3y+a_4)&=0, \\ (y-q)-\lambda(2a_2y+a_3x+a_5)&=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Eliminiert man aus (7) den (uninteressanten) LAGRANGE-Parameter λ, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &(y-q)(2a_1x+a_3y+a_4) \\ &\quad -(x-p)(2a_2y+a_3x+a_5)=0 \end{aligned} \tag{8}$$

Die Gleichungen (2) und (8) zusammen bilden ein nichtlineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten (x,y).

Die LAGRANGE-Funktion für (5) und (3) lautet

$$\begin{aligned} M(x,y,z,\lambda)=&\tfrac{1}{2}\left[(x-r)^2+(y-s)^2+(z-t)^2\right] \\ &-\lambda(b_1x^2+b_2y^2+b_3z^2+b_4xy \\ &+b_5xz+b_6yz+b_7x+b_8y \\ &+b_9z+b_{10}. \end{aligned} \tag{9}$$

Die notwendige Bedingung $\frac{\partial M}{\partial \lambda}=0$ ergibt (3) und die notwendigen Bedingungen $\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}==\frac{\partial M}{\partial z}=0$ ergeben

$$\begin{aligned} (x-r)-\lambda(2b_1x+b_4y+b_5z+b_7)&=0, \\ (y-s)-\lambda(2b_2y+b_4x+b_6z+b_8)&=0, \\ (z-t)-\lambda(2b_3z+b_5x+b_6y+b_9)&=0. \end{aligned} \tag{10}$$

Eliminiert man λ aus der ersten Gleichung von (10) und setzt λ in die beiden anderen ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &(y-s)(2b_1x+b_4y+b_5z+b_z) \\ &\quad -(x-r)(2b_2y+b_4x+b_6z+b_8)=0, \\ &(z-t)(2b_1x+b_4y+b_5z+b_7) \\ &\quad -(x-r)(2b_3z+b_5x+b_6y+b_9)=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Gleichungen (3) und (11) zusammen bilden ein nichtlineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten (x,y,z).

2 Numerisches Lösungsverfahren und Beispiele

Zur Lösung der beiden nichtlinearen Gleichungssysteme benutzen wir das gedämpfte NEWTON-Verfahren, wie es in der Subroutine TAYLOR implementiert ist [1]. Die benötigten Matrizen der partiellen Ableitungen könnten zwar einfach aufgestellt werden, aber da diese lineare Funktionen der Unbekannten sind, ist dies nicht erforderlich, wenn man wie in TAYLOR möglich, zentrale Differenzenquotienten benutzt, da hierdurch in diesem Fall die gleichen Ergebnisse erzielt werden. Als Startwerte benutzten wir $x = y(= z) = 3(2u - 1)$, wobei u bei jeder Zuweisung eine neue, in [0, 1] gleichverteilte Pseudozufallszahl war. Von diesen Startwerten benutzten wir für jedes Beispiel jeweils 100 Stück und gaben, falls die mögliche Divergenz nicht auftrat, Endergebnisse nur dann aus, wenn die Zielfunktionswerte (quadrierte Lotlängen) für F bzw. G kleiner als beim vorherigen Startwert waren. Manchmal werden auf diese Weise einige Lotfußpunkte aber fast immer nur wird derjenige mit dem kürzesten Lot erhalten.

Beispiel 1:

$(p,q) = (1,1)$,
$(a_1,\ldots,a_6) = (5,8,4,-32,-56,80)$.

Gefunden wurde genau ein Lotfußpunkt
$(x,y) = (1.1056, 1.2112)$, die Lotlänge war .23601.

Beispiel 2:

$(p,q) = (1,0)$,
$(a_1,\ldots,a_6) = (8,5,-4,4,-10,-319)$.

Gefunden wurden zwei Lotfußpunkte
$(x,y) = (-5.0025, -6.3642)$ und
$(x,y) = (5.0459, -2.2860)$ mit den Lotlängen 8.7483 und 4.6470.

Beispiel 3:

$(p,q) = (10,10)$,
$(a_1,\ldots,a_6) = (9,16,24,-40,30,0)$.

Gefunden wurde genau ein Lotfußpunkt (wie in Beispiel 1 vermutlich dem absoluten Minimum entsprechend), nämlich $(x,y) = (6.1935, -.5754)$ mit der Lotlänge 11.240.

Beispiel 4:

$(r,s,t) = (1,0,0)$,
$(b_1,\ldots,b_10) = (5,5,8,-8,-4,-4,0,0,0,0)$.

Gefunden wurde ein Lotfußpunkt
$(x,y,z) = (.4452, .4439, .2219)$ mit der Lotlänge .7444.

Beispiel 5:

$(r,s,t) = (1,2,3)$,
$(b_1,\ldots,b_{10}) =$
$(3,-2,-1,4,8,-12,18,-4,-14,0)$.

Gefunden wurden zwei Lotfußpunkte, nämlich
$(x,y,z) = (1.0000, -.9219, -2.5391)$ mit der Lotlänge 6.2625 und
$(x,y,z) = (1.9572, 1.4310, 2.6484)$
mit der Lotlänge 1.1677.

Die Beispiele zeigen, dass man mit diesem Verfahren erwartungsgemäß normalerweise nicht alle Lotfußpunkte – bei einem Ellipsoid gibt es z. B. maximal sechs [2] –, aber in der Regel denjenigen mit der geringsten Lotlänge findet. Um die Wahrscheinlichkeit dafür zu erhöhen, kann man natürlich mit 10000 statt mit 100 Startwerten arbeiten, was bezüglich Rechenzeit ebenfalls noch vernachlässigbar ist.

Literatur

[1] *Späth, H.:* Algorithmen für multivariable Ausgleichsmodelle. R. Oldenbourg-Verlag, München 1974.

[2] *Späth, H.:* Zur Bestimmung von Lotfußpunkten auf in der Koordinatentechnik vorkommenden Flächen. AVN 1/2002, 26–28.

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Helmuth Späth: Fakultät V, Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany.
E-Mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de