



Ein raum-zeitliches Deformationsmodell für Laserscanning-Punktwolken

A spatio-temporal deformation model for laser-scanning point clouds

Corinna Harmening, Wien

Kurzfassung

Mit dem Einzug des terrestrischen Laserscanners in die Ingenieurgeodäsie steht seit einigen Jahren ein vielversprechendes Messinstrument für die Durchführung von geodätischen Überwachungsmessungen zur Verfügung. Trotz des häufigen Einsatzes von terrestrischen Laserscannern im Rahmen von Überwachungsmessungen stellt die anschließende Auswertung der erfassten Daten, die punktwolkenbasierte Deformationsanalyse, immer noch eine Herausforderung dar.

In diesem Beitrag wird ein raum-zeitliches Deformationsmodell vorgestellt, das eine Reihe von offenen Fragestellungen der punktwolkenbasierten Deformationsanalyse löst. Die Grundidee des entwickelten Ansatzes ist die Interpretation der Deformation als Realisierung eines raum-zeitlichen stochastischen Prozesses, womit die Modellierung des erfassten und sich deformierenden Objektes mit Hilfe dreier Anteile möglich wird: Ein deterministischer Trend repräsentiert das nicht-deformierte Objekt, ein stochastisches Signal beschreibt den lokal homogenen stochastischen Deformationsprozess und ein stochastisches Messrauschen berücksichtigt Unsicherheiten, die durch den Messprozess verursacht werden. Durch die stochastische Modellierung der Deformationen ist es nicht notwendig, Punktkorrespondenzen in unterschiedlichen Messepochen zu definieren. Ergebnis der durchgeführten Fläche-zu-Fläche-Vergleiche sind interpretierbare Verschiebungsvektoren.

Schlüsselwörter: B-Spline-Flächen, Deformationsanalyse, Kollokation nach kleinsten Quadraten, Laserscanning, lokal homogene stochastische Prozesse

Abstract

With the increased use of the terrestrial laser scanner in engineering geodesy, a promising measurement instrument for performing geodetic monitoring tasks has been available for several years. Despite the frequent use of terrestrial laser scanners in the context of monitoring tasks, the subsequent analysis of the acquired data, the point cloud-based deformation analysis, still poses a challenge.

In this paper, a spatio-temporal deformation model that solves a number of open issues in point cloud-based deformation analysis is presented. The basic idea of the developed approach is to interpret the deformation as the realization of a spatio-temporal stochastic process, thus allowing for the modeling of the acquired object by means of three components. A deterministic trend represents the non-deformed object, a stochastic signal describes the locally homogeneous stochastic deformation process, and a stochastic measurement noise accounts for uncertainties caused by the measurement process. Due to the stochastic modeling of the deformations, it is not necessary to define point correspondences in different measurement epochs. The results of the surface-to-surface comparison conducted are interpretable displacement vectors.

Keywords: B-spline surfaces, deformation analysis, least squares collocation, laser scanning, locally homogeneous stochastic processes

1. Einleitung

Die Deformationsanalyse stellt seit Jahrzehnten eine der Hauptaufgaben der Ingenieurgeodäsie dar [1]. In der klassischen Deformationsanalyse werden charakteristische Objektpunkte wiederholt bestimmt, beispielsweise durch Nivellement, GNSS-Messungen oder tachymetrische Messungen. Auf Basis dieser Wiederholungsmessungen werden Koordinatendifferenzen abgeleitet, die die Deformationen des Objektes repräsentieren [2]. Obwohl diese Vorgehensweise eine lange Tradition besitzt, bringt sie einige Nachteile mit sich:

Zum einen benötigt die geeignete Wahl von charakteristischen Objektpunkten Vorwissen über die erwartete Deformation, zum anderen erfordert die wiederholte Messung dieser Objektpunkte eine Signalisierung, die nur dann möglich ist, wenn das Objekt zugänglich ist. Hinzu kommt, dass die Deformationsinformation nur an einzelnen diskreten Punkten des Objektes vorliegt und dass diese Vorgehensweise insbesondere bei großen Messobjekten sehr zeit- und arbeitsaufwändig ist ([3], [4] [5]).

Mit dem terrestrischen Laserscanner steht seit einigen Jahren ein Messinstrument zur Verfügung, welches die schnelle und kontaktlose Erfassung auch nicht-zugänglicher Messobjekte erlaubt. Die erfassten Punktwolken besitzen eine hohe räumliche Auflösung und geben eine quasi-kontinuierliche Beschreibung des Messobjektes [4]. Mit diesen Eigenschaften besitzt das Laserscanning ein enormes Potential, um die oben genannten Nachteile der klassischen punktbasierten Deformationsanalyse zu beheben. Trotz der messtechnischen Vorteile des Laserscannings bringt die Auswertung dieser Daten im Rahmen einer sogenannten flächenhaften Deformationsanalyse eine Reihe von Herausforderungen mit sich (siehe z.B. [2], [6]): Insbesondere die Tatsache, dass sich Messpunkte nicht reproduzieren lassen, und die daraus resultierende Frage auf welche Art und Weise sich Punktwolken miteinander vergleichen lassen, ist an dieser Stelle zu nennen. Auch die üblicherweise verringerte Messgenauigkeit im Vergleich zu beispielsweise tachymetrisch gemessenen signalisierten Punkten spielt eine große Rolle, insbesondere wenn es um die Aufdeckbarkeit kleiner Deformationen geht. Weiterhin erschwert das Fehlen eines vollständigen Fehlermodells für terrestrische Laserscanner die Trennung der eigentlichen Deformationen von systematischen Fehlereinflüssen des Laserscanners.

Trotz dieser Herausforderungen existieren eine Reihe von Strategien zur Durchführung eines Punktwolkenvergleichs und damit auch zur Durchführung einer punktwolkenbasierten Deformationsanalyse. Diese Strategien werden üblicherweise wie folgt klassifiziert [6]:

- Bei Durchführung eines *Punkt-zu-Punkt-Vergleichs* wird angenommen, dass Punktkorrespondenzen innerhalb unterschiedlicher Punktwolken existieren (beispielsweise durch die Verwendung eines geeigneten Messaufbaus ([7], [8]) oder dass sie konstruiert werden können. Letzteres wird üblicherweise durch lokale Modelle von Punktwolken ([9], [10]) oder durch den Einsatz von Merkmalsdeskriptoren ([11], [12]) erreicht. Auf Basis dieser identischen Punkte lassen sich anschließend Verschiebungsvektoren bestimmen, die die Deformation repräsentieren.
- Wird ein *Punkt-zu-Fläche-Vergleich* durchgeführt, wird in einem ersten Schritt eine der Punktwolken durch eine Referenzfläche approximiert. In Abhängigkeit von der Art der gewählten Fläche werden mesh-basierte Ansätze

([13], [14]) oder Ansätze basierend auf analytischen Flächen unterschieden ([10], [15]). Für die eigentliche Deformationsanalyse werden anschließend die Distanzen der Punkte aller nachfolgenden Punktwolken zu dieser Referenzfläche bestimmt.

- Bei Verwendung eines *Fläche-zu-Fläche-Vergleichs* werden alle erfassten Punktwolken modelliert – entweder mit Hilfe von Meshes oder mit Hilfe von analytischen Flächen. Die Untersuchung auf Deformationen zwischen diesen Modellen kann dann auf zwei Arten durchgeführt werden: In der ersten Variante werden die Modelle der Punktwolken genutzt um identische Punkte in den unterschiedlichen Messepochen zu konstruieren, sodass die Berechnung von Verschiebungsvektoren möglich wird ([16], [17]). Die zweite Variante setzt analytische Modelle der Punktwolken voraus und vergleicht die geschätzten Parameter dieser Modelle über die Zeit ([8], [18]).

In diesem Beitrag wird ein Ansatz zur flächenhaften Deformationsanalyse vorgestellt, der im erweiterten Sinn einen Fläche-zu-Fläche-Vergleich von Laserscan-Punktwolken erlaubt. Ausgangspunkt dieses Modells ist die Bestimmung einer Referenzfläche, die den nicht-verformten Zustand des Messobjektes beschreibt. Die Deformationen in Bezug auf diese Referenzfläche werden ähnlich einer Kollokation nach kleinsten Quadraten stochastisch modelliert. Anders als die bislang in der Literatur vorgestellten Deformationsmodelle setzt das hier präsentierte Modell keine Punktkorrespondenzen für die Deformationsanalyse voraus. Die erfasste Deformation wird raumkontinuierlich beschrieben, gleichzeitig besteht jedoch auch die Möglichkeit der Erweiterung um eine zeitkontinuierliche Beschreibung (analog zur Prädiktion der Kollokation nach kleinsten Quadraten). Das Modell erlaubt weiterhin die Einbeziehung des vollbesetzten stochastischen Modells des Laserscanners, das sowohl inter- als auch intra-epochale Korrelationen berücksichtigt, und somit die Durchführung realistischer statistischer Tests zur statistischen Absicherung der ermittelten Deformationen.

Das vorliegende Paper ist wie folgt strukturiert: In Kapitel 2 werden die für das Verständnis des Papers erforderlichen mathematischen Grundlagen beschrieben. Insbesondere wird auf die Punktwolkenmodellierung mit Hilfe von B-Spline-Flächen sowie auf die Modellierung von Zusammenhängen innerhalb stochastischer Prozesse eingegangen. In Kapitel 3 wird der in dieser Ver-

öffentlichung verwendete Datensatz vorgestellt. Kapitel 4 widmet sich der formalen Definition des Deformationsmodells, dessen konkreter Ablauf in Kapitel 5 beschrieben ist. In Kapitel 6 werden die erzielten Ergebnisse gezeigt und diskutiert und Kapitel 7 beschließt die Veröffentlichung mit einer Zusammenfassung und einem kurzen Ausblick.

2. Mathematische Grundlagen

2.1 Schätzung von B-Spline-Flächen

Eine B-Spline-Fläche vom Grad p und q ist definiert durch [19]:

$$\hat{S}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{ij}. \quad (1)$$

Ein Flächenpunkt $\hat{S}(u, v)$ berechnet sich somit als das gewichtete Mittel der $(n+1) \times (m+1)$ Kontrollpunkte P_{ij} . Die entsprechenden Gewichte sind die B-Spline-Basisfunktionen $N_{i,p}(u)$ und $N_{j,q}(v)$ von Grad p und q . Die Basisfunktionen sind Funktionen der Flächenparameter u und v und lassen sich rekursiv mit Hilfe des Cox-de-Boor-Algorithmus berechnen ([20], [21]). Weiterhin wird der Parameterraum durch zwei Knotenvektoren $\mathbf{U} = [u_0, \dots, u_r]$ und $\mathbf{V} = [v_0, \dots, v_s]$ in Knotenspannen unterteilt, die den B-Spline-Flächen die Eigenschaft der Lokalität verleihen: Die Verschiebung eines einzelnen Kontrollpunktes verändert den Verlauf der B-Spline-Fläche nur innerhalb eines lokalen Bereichs.

Für die Approximation von Punktwolken mit Hilfe von B-Spline-Flächen werden üblicherweise nur die Positionen der Kontrollpunkte in einem linearen Gauß-Markov-Modell geschätzt. Die Wahl der optimalen Anzahl von zu schätzenden Kontrollpunkten ist eine Aufgabe der Modellselektion und kann mit Informationskriterien oder mit Hilfe der strukturellen Risikominimierung gelöst werden ([22], [23]). Um einen linearen Zusammenhang zwischen den zu schätzenden Kontrollpunkten und den beobachteten Punkten $S(u, v)$ der Punktwolke zu erhalten, werden die Knotenvektoren sowie die Grade der B-Spline-Basisfunktionen üblicherweise vorab bestimmt. Verfahren der Knotenschätzung lassen sich z. B. in [24], [25] finden. Die Bestimmung der Grade der Basisfunktionen kann mit Hilfe der strukturellen Risikominimierung in die Modellselektion einbezogen werden [26]. Alternativ werden häufig kubische B-Splines ($p = q = 3$) verwendet, da mit ihnen die Stetigkeitseigenschaften einer Vielzahl von gebauten Strukturen dargestellt werden können. Weitere Voraussetzung für eine erfolgreiche

Punktwolkenmodellierung mit B-Spline-Flächen ist die Zuordnung geeigneter Flächenparameter u und v zu den Beobachtungen, die diese auf der zu schätzenden Fläche lokalisieren [27].

2.2 Raum-zeitliche stochastische Prozesse

Ein raum-zeitlicher stochastischer Prozess $\Psi(t, \mathbf{X})$ ist stationär (homogen) wenn seine statistischen Momente sich nicht mit der Zeit t (dem Ort \mathbf{X}) ändern und seine gemeinsamen statistischen Momente reine Funktionen des zeitlichen Abstandes τ (des räumlichen Abstandes d) zweier Beobachtungen sind ([28], [29]). Zeitliche Abhängigkeiten innerhalb stationärer stochastischer Prozesse werden üblicherweise mit Hilfe von Kovarianzfunktionen modelliert [28], wohingegen Variogramme (s. Gleichung (2)) verwendet werden, um räumliche Abhängigkeiten zu modellieren [29]:

$$\hat{\gamma}(\bar{d}_l) = \frac{1}{2|N_l|} \sum_{(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \in N_l} (z(\mathbf{X}_i) - z(\mathbf{X}_j))^2. \quad (2)$$

In Gleichung (2) bezeichnen $z(\mathbf{X}_i)$ und $z(\mathbf{X}_j)$ Realisierungen eines stochastischen Prozesses an den Orten \mathbf{X}_i beziehungsweise \mathbf{X}_j . Das Variogramm (2) mittelt die quadrierten Differenzen dieser Realisierungen über alle $|N_l|$ Punktpaare, deren euklidische Distanz $d_{ij} = \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|$ im Intervall $N_l (l = 1, \dots, n_l)$ enthalten ist. Somit ist das Variogramm eine Funktion der mittleren Distanz \bar{d}_l aller Punktpaare, die zum Intervall N_l gehören [30].

Ist die Varianz σ^2 des Prozesses bekannt, kann das Variogramm in ein Kovariogramm transformiert werden:

$$\hat{C}(\bar{d}_l) = \sigma^2 - \hat{\gamma}(\bar{d}_l). \quad (3)$$

Durch Normierung dieses Kovariogramms mit $\sigma^2 = \hat{C}(0)$ erfolgt der Übergang zum Korrelogramm:

$$\hat{\rho}(\bar{d}_l) = \frac{\hat{C}(\bar{d}_l)}{\hat{C}(0)}. \quad (4)$$

Ein stochastischer Prozess wird weiterhin als lokal stationär (homogen) bezeichnet, wenn sich sein Korrelogramm in das Produkt aus einem stationären (homogenen) Korrelogramm und einem sich langsam variierenden Maßstabsfaktor auftrennen lässt [31].

3. Verwendeter Datensatz

Das in Kapitel 4 vorgestellte Deformationsmodell wird auf einen simulierten Datensatz angewendet, dessen Grundlage die in Abbildung 1 dargestellte

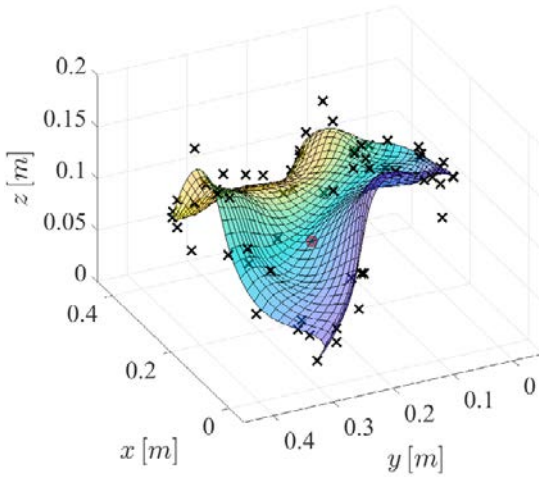


Abb. 1: B-Spline-Fläche als Grundlage für die Datensimulation. Schwarze Kreuze: Kontrollpunkte

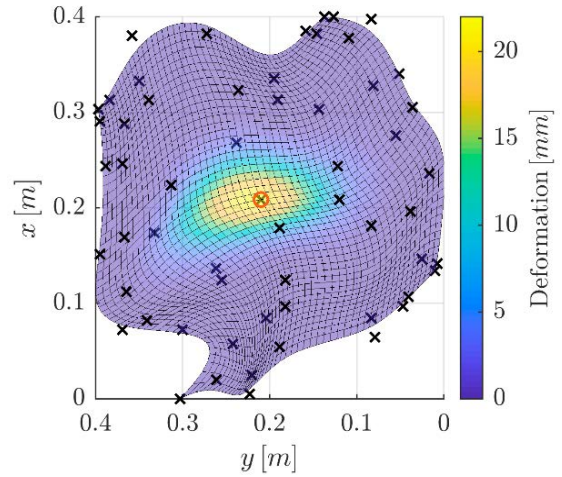


Abb. 2: Deformierter Zustand der B-Spline-Fläche (dritte Messepoche)

kubische B-Spline-Fläche ist. Die Eigenschaft der Lokalität von B-Spline-Flächen ausnutzend, kann eine sich deformierende B-Spline-Fläche generiert werden, indem einzelne Kontrollpunkte verschoben werden. Der in diesem Paper verwendete Datensatz beruht auf einer linearen Verschiebung des Kontrollpunktes $P_{4,5}$ (rot umkreist in Abbildungen 1 und 2) in z -Richtung entsprechend des Bewegungsmodells

$$P_{4,5}(t) = \begin{bmatrix} P_x(0) \\ P_y(0) \\ P_z(0) + 0.025 \frac{m}{s} \cdot t[s] \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Die zu den Zeitpunkten $t_1 = 0s$, $t_2 = 1s$, $t_3 = 1.5s$ sowie $t_4 = 2s$ entstehenden B-Spline-Flächen repräsentieren unterschiedliche Zustände des sich deformierenden Messobjektes. In Abbildung 2 ist der dritte dieser Zustände abgebildet, wobei die Einfärbung der Fläche die Deformation in Bezug auf den initialen Zustand des Objektes zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ darstellt.

Das Scanning dieser Flächen mit Hilfe eines terrestrischen Laserscanners wird durch ihr Sampling mit einer räumlichen Auflösung von ca. 6 mm und das anschließende Verrauschen der gesampelten Punkte mit weißem Rauschen ($\sigma = 1 \text{ mm}$) realisiert.

4. Ein raum-zeitliches Deformationsmodell

Das entwickelte Deformationsmodell baut auf der Annahme auf, dass das beobachtete Objekt ausschließlich Verformungen unterliegt bzw. dass mögliche Starrkörperbewegungen bereits

vorab detektiert und eliminiert wurden. Der Begriff „Deformation“ beinhaltet im Folgenden somit ausschließlich Verformungen. Die vorliegenden Verformungen werden weiterhin als kontinuierlich angenommen, sodass das Auftreten von Kanten oder Brüchen ausgeschlossen ist.

4.1 Formale Definition des Deformationsmodells

Ausgangspunkt für das entwickelte Deformationsmodell ist das funktionale Modell der Kollokation nach kleinsten Quadraten [32]:

$$l = A\vartheta + s + \varepsilon. \quad (6)$$

Die Beobachtungen l setzen sich entsprechend dieses Modells aus drei Anteilen zusammen: Einem deterministischen Trend $A\vartheta$, dem stochastischen Signal s , sowie dem Messrauschen ε . Die stochastischen Größen werden als normalverteilt mit Erwartungswertvektor $\mathbf{0}$ und der entsprechenden Varianz-Kovarianzmatrix $\Sigma_{\varepsilon\varepsilon}$ bzw. Σ_{ss} angenommen:

$$\varepsilon \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}), \quad s \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{ss}). \quad (7)$$

Korrelationen zwischen Signal und Rauschen werden zudem ausgeschlossen [1].

Der Übergang von Gleichung (6) zum Deformationsmodell in Gleichung (8) erfolgt durch die Zuweisung von geometrischen Bedeutungen zu allen drei Anteilen des funktionalen Modells [17]:

$$l = \underbrace{A\vartheta}_{\text{Objekt}} + \underbrace{s}_{\text{Defo.}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{Rauschen}}. \quad (8)$$

Der deterministische Trend beschreibt im vorgestellten Modell die ursprüngliche und nicht-verformte Geometrie des Messobjektes, die während der ersten Messepoche erfasst wird. Somit bleibt der Trend über alle weiteren Messepochen unverändert und kann einmalig mit Hilfe der Beobachtungen der ersten Messepoche geschätzt werden. Für die Modellierung des Trends werden die in Abschnitt 2.1 vorgestellten B-Spline-Flächen verwendet, die aufgrund ihrer Flexibilität geeignet sind, eine Vielzahl von ingenieurgeodätischen Messobjekten auf einheitliche Art und Weise zu beschreiben.

Gleichung (8) entsprechend werden die Deformationen mit Hilfe eines stochastischen Signals s beschrieben und werden somit als Realisierung eines stochastischen Prozesses modelliert. Dieser Prozess wird als Gauß'scher multivariater raum-zeitlicher stochastischer Prozess $\Psi(\mathbf{X}, t)$ angenommen, der eine Funktion der räumlichen Position \mathbf{X} sowie der Zeit t darstellt. Da im Rahmen von laserscannerbasierten Deformationsmessungen üblicherweise nur wenige Messepochen n_e vorliegen, wird der raum-zeitliche Prozess $\Psi(\mathbf{X}, t)$ als eine Ansammlung von n_e zeitlich abhängender multivariater räumlicher stochastischer Prozesse modelliert, von denen jeder einzelne die Objektdeformation in der entsprechenden Messepoche verursacht [17]:

$$\Psi(\mathbf{X}, t) = \{ \Psi(\mathbf{X})^{(1)} \ \Psi(\mathbf{X})^{(2)} \ \dots \ \Psi(\mathbf{X})^{(n_e)} \}. \quad (9)$$

Jeder der räumlichen Prozesse ist wiederum ein multivariater stochastischer Prozess, der die Deformation in allen drei euklidischen Koordinatenrichtungen repräsentiert:

$$\Psi(\mathbf{X})^{(i_e)} = \{ \Psi_x^{(i_e)}(\mathbf{X}) \ \Psi_y^{(i_e)}(\mathbf{X}) \ \Psi_z^{(i_e)}(\mathbf{X}) \}, \quad i_e = 1, \dots, n_e. \quad (10)$$

Der multivariate Deformationsprozess wird weiterhin als erwartungswert-homogen angenommen:

$$E\{\Psi(\mathbf{X}, t)\} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Somit wird die Deformation ausschließlich durch die Varianzen und Kovarianzen des stochastischen Prozesses charakterisiert. Abhängig von der Art der Deformation kann die Größe der Deformation stark variieren – sowohl über das Objekt als auch über den Beobachtungszeit-

raum. Aus diesem Grund kommen ausschließlich varianz-inhomogene stochastische Prozesse für die Modellierung der Deformation in Frage. Wenn un stetige Deformationen ausgeschlossen werden, stellt ein lokal homogener stochastischer Prozess mit einer homogenen Korrelationsstruktur und einer sich langsam ändernden Varianz eine geeignete Möglichkeit dar, den nicht-homogenen Prozess zu approximieren. Auf Basis dieser Überlegungen lässt sich die (Co-)Varianz eines lokal homogenen raum-zeitlichen stochastischen Prozesses wie folgt definieren [17]:

$$C_{i,j}^{(i_e, j_e)}(\mathbf{X}_1^{(i_e)}, \mathbf{X}_2^{(j_e)}) = \sigma_i^{(i_e)}(\mathbf{X}_1^{(i_e)}) \cdot \sigma_j^{(j_e)}(\mathbf{X}_2^{(j_e)}) \cdot \rho_{i,j}^{(i_e, j_e)}(d_1^{(i_e)}, d_2^{(j_e)}), \quad (12)$$

$$\text{mit: } i, j = x, y, z \\ i_e, j_e = 1, \dots, n_e$$

4.2 Formelapparat zur Filterung und Prädiktion der Deformation

Auf Basis der formalen Definition im vorhergehenden Abschnitt lassen sich Formeln für die Filterung und Prädiktion der Deformation herleiten. Hierfür wird das funktionale Modell (8) zu einem epochalen Modell erweitert, sodass die Beobachtungen aller n_e Messepochen in einem funktionalen Modell berücksichtigt werden können [17]:

$$\begin{bmatrix} l^{(1)} \\ l^{(2)} \\ \vdots \\ l^{(n_e)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A^{(n_e)} \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \vartheta^{(1)} \\ \vartheta^{(2)} \\ \vdots \\ \vartheta^{(n_e)} \end{bmatrix}}_{\bar{\vartheta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} s^{(1)} \\ s^{(2)} \\ \vdots \\ s^{(n_e)} \end{bmatrix}}_{\bar{s}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(2)} \\ \vdots \\ \varepsilon^{(n_e)} \end{bmatrix}}_{\bar{\varepsilon}}. \quad (13)$$

Mit diesem Schritt einher geht die Erweiterung der beiden stochastischen Modelle zu:

$$\sum_{ss} = \begin{bmatrix} \Sigma_{ss}^{(1,1)} & \Sigma_{ss}^{(1,2)} & \dots & \Sigma_{ss}^{(1,n_e)} \\ \Sigma_{ss}^{(2,1)} & \Sigma_{ss}^{(2,2)} & \dots & \Sigma_{ss}^{(2,n_e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{ss}^{(n_e,1)} & \Sigma_{ss}^{(n_e,2)} & \dots & \Sigma_{ss}^{(n_e,n_e)} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\sum_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{(1,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \Sigma_{\varepsilon\varepsilon}^{(n_e,n_e)} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Während für das stochastische Modell des Signals in Gleichung (14) inter- und intra-epochale Korrelationen zugelassen werden, werden letztere

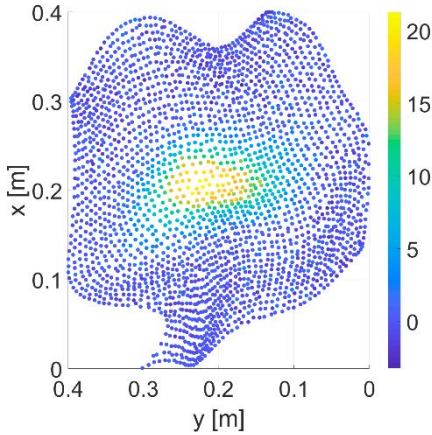


Abb. 3: z-Komponente der Residuen zur Trendfläche in mm am Beispiel der dritten Messepoche

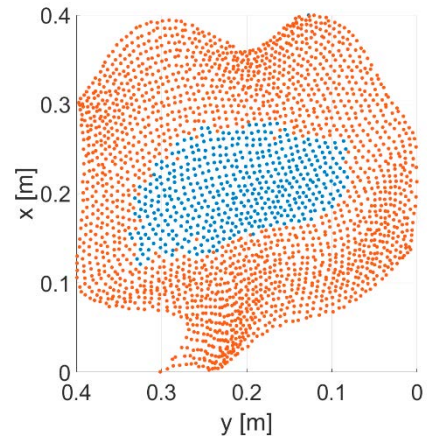


Abb. 4: Detektierter deformierter Bereich am Beispiel der z-Richtung der dritten Messepoche (rot: nicht-deformiert, blau: deformiert)

im stochastischen Modell des Rauschens in Gleichung (15) zunächst ausgeschlossen.

Den oben vorgestellten Ideen folgend, kann der einmalig geschätzte Trend von den Beobachtungen subtrahiert werden, nachdem er bestimmt wurde:

$$\bar{e} = \bar{l} - \bar{A}\vartheta^{(1)} = \bar{s} + \bar{\varepsilon}. \quad (16)$$

Mit diesem Schritt ergeben sich die Residuen \bar{e} bezogen auf die Trendfläche als die eigentlichen Beobachtungen für die Deformationsanalyse.

Die Erweiterung von Gleichung (16) um das zu präzisierende Signal \bar{s}' resultiert im bedingten Ausgleichungsmodell

$$\bar{e} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ & \mathbf{B}^T & \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{s}' \\ \bar{\varepsilon} \\ \bar{v} \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}}. \quad (17)$$

Die Lösung erfolgt damit über [17]:

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{s}} \\ \hat{\bar{s}}' \\ \hat{\bar{\varepsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\bar{s}\bar{s}} \\ \Sigma_{\bar{s}'\bar{s}} \\ \Sigma_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}, \quad (18)$$

mit dem geschätzten Korrelatenvektor

$$\hat{\mathbf{k}} = (\Sigma_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}} + \Sigma_{\bar{s}\bar{s}})^{-1} \bar{e}. \quad (19)$$

5. Durchführung der Deformationsanalyse

In diesem Kapitel wird der Ablauf der Deformationsanalyse mit Hilfe des vorgestellten Modells anhand des in Abschnitt 3 vorgestellten Datensatzes demonstriert.

5.1 Modellierung des Trends

Den Ideen aus Abschnitt 4 folgend, wird die Punktwolke der ersten Messepoche dazu verwendet, die sie optimal approximierende B-Spline-Fläche zu bestimmen. Aus Gründen der Einfachheit werden mit Ausnahme der Positionen der Kontrollpunkte alle verbleibenden B-Spline-Parametergruppen (Grade der Basisfunktionen, Anzahl der Kontrollpunkte, Flächenparameter, Knotenvektoren) auf ihre Sollwerte gesetzt, die aus dem Simulationsprozess bekannt sind. Somit umfasst die Bestimmung der bestangepassten B-Spline-Fläche ausschließlich die Schätzung der Kontrollpunkte in einem linearen Gauß-Markov-Modell. Unter Verwendung der B-Spline-Basisfunktionen lässt sich hierfür die Designmatrix $\mathbf{A}^{(1)}$ aufstellen (für detaillierte Informationen s. z.B. [33]), mit deren Hilfe sich anschließend unter Verwendung des stochastischen Modells $\Sigma_u^{(1)} = \mathbf{I}$ die Kontrollpunkte schätzen lassen:

$$\hat{\vartheta}^{(1)} = (\mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{A}^{(1)})^{-1} \mathbf{A}^{(1)T} \mathbf{l}^{(1)}. \quad (20)$$

Anschließend werden mit Hilfe der geschätzten Kontrollpunkte für alle nachfolgenden Messepochen die Beobachtungen geschätzt, die das nicht-verformte Objekt beschreiben:

$$\hat{l}^{(i_e)} = A^{(i_e)} \hat{\Theta}^{(1)}, \text{ mit } i_e = 1, \dots, n_e. \quad (21)$$

Die daraus entstehenden Residuen der Trend-schätzung

$$e^{(i_e)} = l^{(i_e)} - \hat{l}^{(i_e)} \quad (22)$$

setzen sich dann aus dem Messrauschen und der Deformation des Objektes zusammen [17].

Abbildung 3 zeigt die Punktwolke der dritten Messepoche eingefärbt nach der z-Komponente dieser Residuen. Deutlich erkennbar ist der deformierte Bereich in der Mitte der Fläche, in dem die Residuen Größenordnungen von über 20 mm annehmen.

5.2 Detektion deformierter Bereiche

Da das Signal ausschließlich in den deformierten Bereichen des Objektes auftritt, erfordert die Modellierung des Signals zunächst eine Unterscheidung zwischen deformierten und nicht-deformierten Bereichen. Diese Detektion basiert auf dem Wissen, dass in der ersten Messepoche keine Deformationen auftreten. Somit lassen sich mit Hilfe der Residuen zur Trendfläche der ersten Messepoche Informationen über die Größe des Messrauschens ableiten [17]:

$$\sigma_{i,0}^{(1)2} = \frac{e_i^{(1)T} e_i^{(1)}}{n_i^{(1)} - (n + 1) \cdot (m + 1)}, \quad i = x, y, z. \quad (23)$$

Diese Varianz des Messrauschens wird für die Berechnung eines Schwellwertes verwendet, um Deformationen zu detektieren. Unter der Annahme, dass Regionen, in denen die Abweichung zwischen Beobachtung und geschätzter Trendfläche dieses Messrauschens um einen gewissen Betrag überschreitet, deformiert sind, wird eine Schwellwertbetrachtung durchgeführt: Jede Koordinate, deren Residuum die Gleichung

$$|e_{i,j}^{(i_e)}| > 1.5 \cdot \sigma_{i,0}^{(1)}, \quad (24)$$

mit: $i_e = 2, \dots, n_e$; $i = x, y, z$; $j = n_i^{(i_e)}$

erfüllt, wird als deformiert markiert [17]. Aufgrund der Wahl des relativ kleinen Schwellwerts ist die Wahrscheinlichkeit von Fehlern erster Art relativ hoch. Solche Punkte werden automatisch erkannt und in einem Nachbearbeitungsschritt dem nicht-deformierten Bereich zugeordnet.

Die Schwellwertbetrachtung führt somit zu einer groben Unterscheidung zwischen deformierten und nicht-deformierten Bereichen für

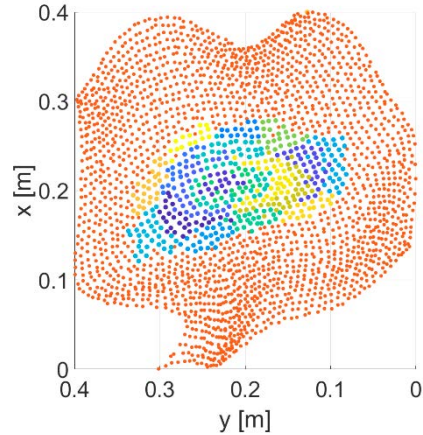


Abb. 5: Ergebnis der k-means-Clustering am Beispiel der dritten Messepoche

jede Koordinatenrichtung (beispielhaft zu sehen in Abbildung 4 für die z-Richtung der dritten Messepoche).

5.3 Modellierung des Signals

Die vollständige Modellierung der Deformationen erfordert eine Schätzung des Signals. Hierfür ist die Bestimmung der lokal homogenen Varianzen sowie die Modellierung der homogenen Korrelationsstruktur notwendig. Das entsprechende mehrstufige Verfahren wird im Folgenden Schritt für Schritt vorgestellt.

5.3.1 Schaffung lokal homogener Bereiche

Um der lokalen Homogenität des Signals Rechnung zu tragen, wird der deformierte Bereich in einem ersten Schritt in Bereiche unterteilt, in denen das entsprechende Signal als homogen angesehen werden kann und somit die Varianz in Gleichung (12) konstant ist. Diese Unterteilung wird durch eine k-means-Clustering erreicht [34]. Der einzige Parameter des Algorithmus ist die Anzahl der Cluster n_c . Dieser Wert wird strategisch in Abhängigkeit von der Größe des deformierten Bereichs gewählt (s.[17] für mehr Details). Abbildung 5 zeigt das Ergebnis der Clustering für die z-Koordinate der Punktwolke der dritten Messepoche.

Unter Verwendung der 3-Sigma-Regel können die Abweichungen zur Trendfläche verwendet werden, um für jedes Cluster c_j lokal homogene Standardabweichungen zu berechnen [17]:

$$\sigma_{i,j}^{(i_e)} = \frac{1}{3} \max \left(\left| e_{i,j}^{(i_e)} \right| \right), \quad (25)$$

mit: $e_{i,j}^{(i_e)} \in c_j$
 $j = 1, \dots, n_c$
 $i = x, y, z$
 $i_e = 2, \dots, n_e$

5.3.2 Herstellung von globaler Homogenität

Um die homogene Korrelationsstruktur zu bestimmen, werden die Residuen zur Trendfläche normiert [17]:

$$\hat{e}_{i,j}^{(i_e)} = \frac{e_{i,j}^{(i_e)}}{\sigma_{i,j}^{(i_e)}}. \quad (26)$$

Die normierten Residuen besitzen anschließend eine homogene Größenordnung und können somit für die Berechnung empirischer Korrelogramme verwendet werden.

5.3.3 Schätzung empirischer Korrelogramme

Für die vollständige Beschreibung des Signals werden drei unterschiedliche Typen von empirischen Korrelogrammen geschätzt [17]:

- Die *Autokorrelogramme* $\hat{\rho}_{x^{(i_e)}x^{(i_e)}}(d)$, $\hat{\rho}_{y^{(i_e)}y^{(i_e)}}(d)$ und $\hat{\rho}_{z^{(i_e)}z^{(i_e)}}(d)$ ($i_e = 2, \dots, n_e$) jeder Messepoche beschreiben die stochastischen Zusammenhänge in den drei Koordinatenrichtungen.
- Die *räumlichen Kreuzkorrelogramme* $\hat{\rho}_{x^{(i_e)}y^{(i_e)}}(d)$, $\hat{\rho}_{x^{(i_e)}z^{(i_e)}}(d)$, ..., $\hat{\rho}_{y^{(i_e)}z^{(i_e)}}(d)$ ($i_e = 2, \dots, n_e$) charakterisieren die stochastischen Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen Koordinatenrichtungen innerhalb derselben Messepoche.
- Die *zeitlichen Kreuzkorrelogramme* $\hat{\rho}_{x^{(i_e)}x^{(j_e)}}(d)$, $\hat{\rho}_{y^{(i_e)}y^{(j_e)}}(d)$ und $\hat{\rho}_{z^{(i_e)}z^{(j_e)}}(d)$ sowie $\hat{\rho}_{x^{(i_e)}y^{(j_e)}}(d)$, $\hat{\rho}_{x^{(i_e)}z^{(j_e)}}(d)$, ..., $\hat{\rho}_{y^{(i_e)}z^{(j_e)}}(d)$ ($i_e, j_e = 2, \dots, n_e, i_e \neq j_e$) beschreiben sämtliche stochastische Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen Messeperioden und modellieren somit – obwohl sie keine Funktion der Zeit sind – implizit die zeitlichen Zusammenhänge.

Für alle drei Arten wird die Korrelationsstruktur an dieser Stelle als isotrop angenommen. Eine Erweiterung auf anisotrope Prozesse und dementsprechend eine Berechnung von directionalen Korrelogrammen ist Bestandteil zukünftiger Untersuchungen.

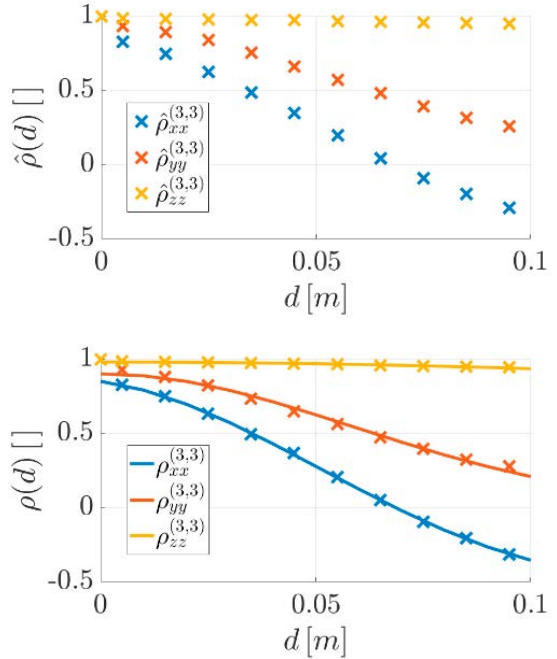


Abb. 6: Empirische (oben) und analytische (unten) Autokorrelationen am Beispiel der dritten Messepoche

Abbildung 6 (oben) zeigt beispielhaft die geschätzten Autokorrelogramme der dritten Messepoche in allen drei Koordinatenrichtungen. Insbesondere in z-Richtung weisen die Autokorrelogramme eine sehr langsame Abnahme auf, aber auch in den anderen beiden Koordinatenrichtungen sind stark ausgeprägte stochastische Zusammenhänge zu erkennen.

5.3.4 Aufstellen des stochastischen Modells des Signals

Die empirischen Korrelogramme werden anschließend mit Hilfe analytischer positiv semi-definiter Funktionen modelliert. Für die in Abbildung 6 (oben) dargestellten empirischen Korrelogramme wird hierfür die Gauß-Funktion

$$\rho(d) = C_0 \cdot e^{-b^2 d^2}; \quad C_0, b > 0 \quad (27)$$

verwendet. Das Ergebnis der Kurvenschätzung in Abbildung 6 (unten) zeigt, dass für den hier betrachteten Datensatz bereits mit einfachen analytischen Funktionen zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden.

Mit Hilfe dieser analytischen Funktionen wird die Korrelationsmatrix R_{gg} , die sich aus $n_e \times n_e$ Untermatrizen zusammensetzt, aufgestellt:

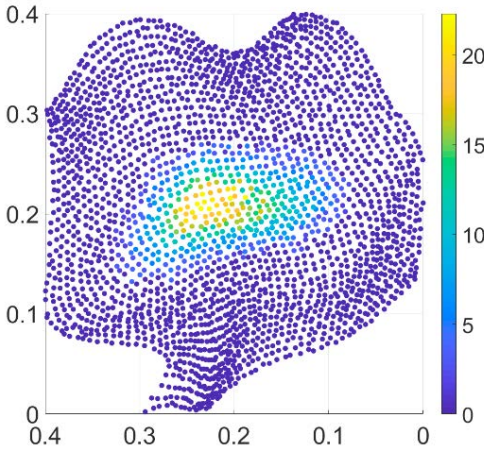


Abb. 7: Geschätzte Deformation in mm am Beispiel der dritten Messepoche

$$R_{ss} = \begin{bmatrix} R_{ss}^{(1,1)} & \dots & R_{ss}^{(1,n_e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{ss}^{(n_e,1)} & \dots & R_{ss}^{(n_e,n_e)} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Die Untermatrizen auf der Hauptdiagonale beschreiben die stochastischen Zusammenhänge innerhalb einer Messepoche und werden dementsprechend mit Hilfe der Autokorrelationsfunktionen sowie der räumlichen Kreuzkorrelationsfunktionen besetzt. Die Untermatrizen auf den Nebendiagonalen enthalten die stochastischen Zusammenhänge zwischen den unterschiedlichen Messepochen. Für ihre Besetzung werden die zeitlichen Kreuzkorrelationen verwendet. Für detailliertere Informationen sei auf [17] verwiesen.

Die auf diese Art und Weise aufgestellte Korrelationsmatrix wird anschließend mit Hilfe der lokal homogenen Varianzen in die Kovarianzmatrix des Signals \sum_{ss} umgeformt. Zu beachten ist jedoch, dass sich die mit Gleichung (25) bestimmten Varianzen zunächst aus den Varianzen des Signals und des Rauschens zusammensetzen und somit eine Trennung dieser beiden Anteile notwendig ist (s. [17] für mehr Details).

5.4 Modellierung des Rauschens

Die verbleibende zu bestimmende Größe ist die Kovarianzmatrix des Rauschens $\sum_{\epsilon\epsilon}$. Da im Rahmen dieser Veröffentlichung simulierte Daten mit weißem Rauschen verwendet werden, kann $\sum_{\epsilon\epsilon}$ als Diagonalmatrix modelliert werden. Die für die Besetzung benötigten Varianzen der nicht-deformierten Bereiche ergeben sich aus

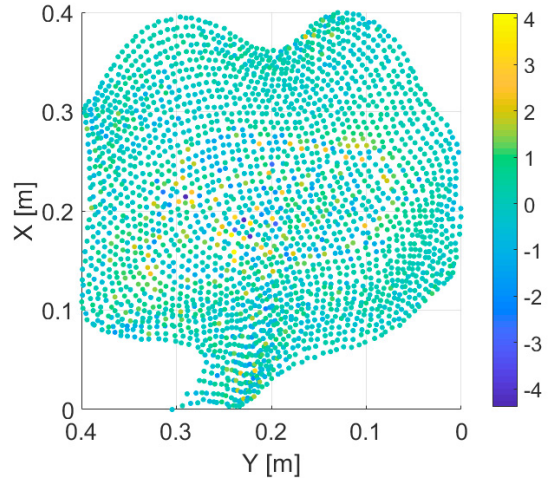


Abb. 8: Abweichungen in mm zwischen den geschätzten und den tatsächlichen Deformationen

der Trendschätzung, während sich die Varianzen der deformierten Bereiche mit Hilfe der zuvor angesprochenen Trennung der Varianzen aus Gleichung (25) bestimmen lassen.

6. Ergebnisse der Filterung

Mit den aufgestellten Kovarianzmatrizen des Rauschens und des Signals lassen sich die Beobachtungen entsprechend der in Abschnitt 4.2 angegebenen Formeln filtern. Abbildung 7 zeigt beispielhaft die gefilterte Punktwolke der dritten Messepoche, eingefärbt nach der Größe der geschätzten Deformation. Ein visueller Vergleich mit Abbildung 2, in der die tatsächliche Deformation dargestellt ist, lässt bereits eine große Übereinstimmung erahnen.

Zur besseren Vergleichbarkeit sind zusätzlich in Abbildung 8 die Differenzen zwischen tatsächlicher und geschätzter Deformation dargestellt. Wie zu erkennen ist, variiert der Großteil der Abweichungen zufällig in einem Bereich von etwa -3 mm bis 3 mm. Einige wenige Ausnahmen lassen sich im Übergangsbereich zwischen dem deformierten und dem nicht-deformierten Bereich des Objektes erkennen (dunkelblaue Punkte). Abgesehen von diesen Ausreißern liegen die Abweichungen innerhalb des 3σ -Bereichs des für die Datensimulation verwendeten Messrauschens.

Aufgrund der unterschiedlichen Behandlung der beiden Bereiche während der Auswertung ist eine Unterscheidung des deformierten und des nicht-deformierten Bereichs der Punktwolke anhand der Größenordnung der Abweichungen

möglich: Die Genauigkeit der Messungen wird durch die Trendschätzung erhöht, während sie durch die Filterung erhalten bleibt. In beiden Bereichen verhalten sich die Abweichungen jedoch zufällig und lassen keine der Deformation ähnelnde Charakteristik erkennen. Die durch den Deformationsprozess verursachten Systematiken wurden somit durch das stochastische Modell des Signals in zufriedenstellender Weise kompensiert.

7. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde ein flächenhaftes Deformationsmodell vorgestellt, das es erlaubt, auf Basis von Laserscanning-Punktwolken Deformationen raumkontinuierlich zu beschreiben. Die Grundlage des Ansatzes bildet die Schätzung einer B-Spline-Fläche, die das nicht-deformierte Objekt repräsentiert. Ähnlich wie bei der Kollokation nach kleinsten Quadraten wird die Deformation stochastisch modelliert. Hierfür wird der Deformationsvorgang als ein lokal homogener zeitlich abhängender multivariater räumlicher stochastischer Prozess interpretiert. Charakterisiert wird der Prozess durch homogene Mittelwerte und Korrelationsstrukturen sowie ortsabhängige Varianzen. Die Beschreibung des Prozesses erfordert ein mehrstufiges Verfahren, bestehend aus der Unterscheidung zwischen deformierten und nicht-deformierten Bereichen, der Bestimmung lokaler Varianzen sowie der Schätzung der homogenen Korrelationsstruktur.

Aufgrund der stochastischen Interpretation der Deformation kann die Herausforderung, identische Punkte in unterschiedlichen Messepochen zu finden, umgangen werden. Das entwickelte Modell implementiert im weiteren Sinne einen Fläche-zu-Fläche-Vergleich und erlaubt die Einbeziehung eines vollständigen stochastischen Modells des Laserscanners. Die resultierenden Deformationsmaße in Form von Verschiebungsvektoren sind interpretierbar und aussagekräftig. Darüber hinaus existiert analog zur Kollokation nach kleinsten Quadraten die Möglichkeit das Modell um einen Prädiktionsschritt zu erweitern, womit eine raum- und zeitkontinuierliche Beschreibung der deformierten Oberfläche möglich wird.

Das vorgestellte Verfahren wurde auf simulierte Daten angewandt. Der Vergleich der Ergebnisse mit den bekannten Sollflächen ist vielversprechend: Selbst bei Deformationen, die im Vergleich zur Objektgröße relativ groß sind, wird die Deformation mit einer Genauigkeit in der Größenordnung des Messrauschens modelliert.

In zukünftigen Arbeiten wird der Übergang von simulierten Daten zu gemessenen Daten erfolgen. Ein hierfür notwendiger Schritt sind Untersuchungen bezüglich der Trennbarkeit von korreliertem Messrauschen und korreliertem Signal. Weiterhin ist davon auszugehen, dass der hier verwendete lokal homogene stochastische Prozess nicht für alle Deformationsarten eine geeignete Approximation darstellt. Die Untersuchung von Alternativen ist ebenfalls Bestandteil zukünftiger Arbeiten.

Referenzen

- [1] O. Heunecke, H. Kuhlmann, W. Welsch, A. Eichhorn und H. Neuner, *Handbuch Ingenieurgeodäsie: Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen*, Berlin: Wichmann, 2013.
- [2] T. Wunderlich, W. Niemeier, D. Wujanz, C. Holst, F. Neitzel und H. Kuhlmann, „Areal deformation analysis from TLS point clouds - the challenge“, *Allgemeine Vermessungsnachrichten (avn)*, Bd. 123, Nr. 11-12, S. 340 - 351, 2016.
- [3] R. Shamshiri, M. Motagh, M. Baes und M. A. Sharifi, „Deformation analysis of the Lake Urmia causeway (LUC) embankments in northwest Iran: insights from multi-sensor interferometry synthetic aperture radar (InSAR) data and finite element modeling (FEM)“, *Journal of Geodesy*, Bd. 88, Nr. 12, S. 1171-1185, 2014.
- [4] J.-A. Paffenholz, U. Stenz, D. Wujanz, F. Neitzel und I. Neumann, „3D-Punktwolken-basiertes Monitoring von Infrastrukturbauwerken am Beispiel einer historischen Gewölbebrücke“, in *Terrestrisches Laserscanning*, 2017.
- [5] Z. W. Li, Z. F. Yang, J. J. Zhu, J. Hu, Y. J. Wang, P. X. Li und G. L. Chen, „Retrieving three-dimensional displacement fields of mining areas from a single InSAR pair“, *Journal of Geodesy*, Bd. 89, S. 17-32, 2015.
- [6] W. Mukupa, G. W. Roberts, C. Hancock und K. Al-Manasir, „A review of the use of terrestrial laser scanning application for change detection and deformation monitoring of structures“, *Survey Review*, Bd. 49, Nr. 353, S. 99-116, 2016.
- [7] M. Little, „Slope monitoring strategy at PPRust open pit operation“, in *International Symposium on Stability of Rock Slopes in Open Pit Mining and Civil Engineering*, Kapstadt, 2006.
- [8] R. Lindenberg und N. Pfeifer, „A statistical deformation analysis of two epochs of terrestrial laser data of a lock“, in *Optimal 3D Measurement Techniques VII*, Wien, 2005.
- [9] D. Lague, N. Brodu und J. Leroux, „Accurate 3D comparison of complex topography with terrestrial laser scanner: Application to the Rangitikei canyon (N-Z)“, *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, Bd. 82, S. 10-26, 2013.
- [10] A. Pesci, G. Teza, E. Bonali, G. Casula und E. Boschi, „A laser scanning-based method for fast estimation of seismic-induced building deformations“, *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, Bd. 79, S. 185-198, 2013.

- [11] A. Wagner, W. Wiedemann und T. Wunderlich, „Fusion of Laser Scan and Image Data for Deformation Monitoring - Concept and Perspective“, in *7th International Conference on Engineering Surveying (INGEO)*, Lissabon, 2017.
- [12] Z. Gojcic, C. Zhou und A. Wieser, „Learned compact local feature descriptor for TLS-based geodetic monitoring of natural outdoor scenes“, *ISPRS Annals of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Bd. IV, S. 113-120, 2018.
- [13] E. Serantoni und A. Wieser, „TLS-based Deformation Monitoring of Snow Structures“, in *154. DVVW-Seminar Terrestrisches Laserscanning*, Fulda, 2016.
- [14] D. Wujanz, *Terrestrial Laser Scanning for Geodetic Deformation Monitoring*, Dissertation, Berlin: Technische Universität Berlin, 2016.
- [15] L. Truong-Hong und R. Lindenbergh, „Measuring deformation of bridge structures using laser scanning data“, in *4th Joint International Symposium on Deformation Monitoring (JISDM)*, Athen, 2019.
- [16] L. Raffl, W. Wiedemann und T. Wunderlich, „Non-signalized Structural Monitoring using Scanning Total Stations“, in *4th Joint International Symposium on Deformation Monitoring (JISDM)*, Athen, 2019.
- [17] C. Harmening und H. Neuner, „A spatio-temporal deformation model for laser scanning point clouds“, *Journal of Geodesy*, Bd. 94, S. 1-26, 2020.
- [18] C. Harmening und H. Neuner, „Detecting rigid body movements from TLS-based areal deformation measurements“, in *FIG Working Week 2016*, Christchurch, 2016.
- [19] L. Piegl und W. Tiller, *The NURBS Book*, Berlin/Heidelberg: Springer, 1997.
- [20] M. Cox, „The Numerical Evaluation of B-Splines“, *IMA Journal of Applied Mathematics*, Bd. 10, S. 134-149, 1972.
- [21] C. De Boor, „On calculating with B-splines“, *Journal of Approximation Theory*, Bd. 6, S. 50-62, 1972,.
- [22] C. Harmening und H. Neuner, „Choosing the Optimal Number of B-spline Control Points (Part 1: Methodology and Approximation of Curves)“, *Journal of Applied Geodesy*, Bd. 10, S. 139-157, 2016.
- [23] C. Harmening und H. Neuner, „Choosing the optimal number of B-spline control points (Part 2: Approximation of surfaces and applications)“, *Journal of Applied Geodesy*, Bd. 11, S. 43-52, 2017.
- [24] J. Bureick, H. Alkhatib und I. Neumann, „Robust spatial approximation of laser scanner point clouds by means of free-form curve approaches in deformation analysis“, *Journal of Applied Geodesy*, Bd. 10, 2016.
- [25] C. Schmitt und H. Neuner, „Knot estimation on B-Spline curves“, *Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation*, Bd. 103, S. 188-197, 2015.
- [26] C. Harmening, *Spatio-Temporal Deformation Analysis Using Enhanced B-Spline Models of Laser Scanning Point Clouds*, Dissertation, Wien: Technische Universität Wien, 2020.
- [27] C. Harmening und H. Neuner, „A constraint-based parameterization technique for B-spline surfaces“, *Journal of Applied Geodesy*, Bd. 9, S. 143-161, 2015.
- [28] R. Schlittgen und B. H. J. Streitberg, *Zeitreihenanalyse*, München: Oldenbourg, 2013.
- [29] N. A. C. Cressie und C. K. Wikle, *Statistics for spatio-temporal data*, New York: Wiley, 2015.
- [30] T. Smith, *Notebook on spatial data analysis*, <http://www.seas.upenn.edu/~ese502/#notebook>, 2016.
- [31] R. Silverman, „Locally stationary random processes“, *IEEE Transactions on Information Theory*, Bd. 3, Nr. 3, S. 182-187, 1957.
- [32] H. Moritz, *Advanced physical geodesy*, Karlsruhe: Wichmann, 1989.
- [33] J. Bureick, H. Neuner, C. Harmening und I. Neumann, „Curve and Surface Approximation of 3D Point Clouds“, *Allgemeine Vermessungsnachrichten (avn)*, Bd. 123, S. 315-327, 2016.
- [34] S. Lloyd, „Least squares quantization in PCM“, *IEEE Transactions on Information Theory*, Bd. 28, Nr. 2, S. 129-137, 1982.

Anschrift der Autorin

Dr. Corinna Harmening MSc, Technische Universität Wien, Forschungsgruppe Ingenieurgeodäsie, Department Geodäsie und Geoinformation, Wiedner Hauptstraße 8 / E120-05, 1040 Wien.

E-Mail: Corinna.Harmening@geo.tuwien.ac.at